MATHS - FASCICULES

COURS DE MATHÉMATIQUES

Licence 1

Enseignant : Prof Hypolithe OKOU

okouakpetihi@hotmail.com

24 mai 2021

Table des matières

1 MATRICES **2**
1.1 Présentation des matrices de type (p, q) sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif 2
1.2 Quelques matrices de type (p, q) 3
1.3 OPERATIONS SUR LES MATRICES 5
1.3.1 Somme de deux matrices de même type 5
1.3.2 Egalité de deux matrices de même type 5
1.3.3 Multiplication par un scalaire d'une matrice 6
1.3.4 Produit de deux matrices 6
1.4 Trace d'une matrice carrée 8
1.5 Matrices inversibles 8
1.6 Matrices équivalentes et matrices semblables 9
1.7 Opérations élémentaires sur les matrices 10
1.8 Matrices échelonnées 12
1.8.1 Inversion d'une matrice par les opérations élémentaires sur les matrices 14
1.9 Rang d'une matrice 15

2 CALCUL DE DÉTERMINANTS **22**
2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 22
2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 22
2.2.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 3 par la méthode de Sarrus 22
2.2.2 Calcul du déterminant par le développement suivant une ligne ou une colonne. 23
2.3 Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3 25
2.4 Propriétés des déterminants 26
2.5 Inverse d'une matrice carrée 31
2.5.1 Propriétés de la matrice inverse 31
2.5.2 Inversion d'une matrice par sa comatrice 32
2.6 Rang d'une matrice 33

3 RÉSOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINÉAIRES **34**
3.1 Résolution du système (S) avec la matrice augmentée 36
3.2 Méthode de résolution d'un système de Cramer 38
3.2.1 Résolution d'un système de Cramer par l'inversion de la matrice associée au système 38
3.2.2 Résolution d'un système de Cramer par des déterminants 39
3.3 Systèmes échelonnés ou Méthode du pivot 40
3.4 Calcul de l'inverse d'une matrice par la résolution de systèmes 41

4 ESPACES VECTORIELS **44**
4.1 Introduction 44
4.2 Définition d'un espace vectoriel 45
4.2.1 Exemples 45
4.3 Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs 46
4.4 Espaces vectoriels de dimension finie 47
4.4.1 Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs 47
4.4.2 Base d'un espace vectoriel 48
4.4.3 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie 50
4.5 Sous-espaces vectoriels 50
4.5.1 Exemples de sous-espaces vectoriels 51
4.6 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie 51
4.6.1 Rang d'une suite finie de vecteurs 51
4.7 Sous-espaces supplémentaires 54
4.8 Somme de n sous-espaces vectoriels 55
4.9 Produit de deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$ . . . 56

5 APPLICATIONS LINÉAIRES **57**
5.1 Image et Noyau 58
5.1.1 Le théorème noyau-image 59
5.1.2 Rang d'une application linéaire 59
5.1.3 Projections et symétries linéaires 60
5.2 Opérations sur les applications linéaires 61
5.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ 61
5.2.2 Composition des applications linéaires 61
5.3 Matrice d'une application linéaire $f : E \to F$ 62
5.3.1 Changement de bases 64
5.3.2 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie(Rappel,suite et fin) 66
5.3.3 Déterminant et trace d'un endomorphisme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie 67

INTRODUCTION

La Géométrie des Grecs(et l'Arithmétique) est(sont) l'origine arbitraire de notre repère temporel, puis vint René Descartes qui, avec son système de repère et de coordonnées, a fait émergé l'algèbre de la géométrie et la géométrie de l'algèbre, le tout sous le vocable de géométrie analytique ou d'algèbre linéaire quitte à se passer de l'intuition géométrique immédiate.
L'algèbre est la science des équations, cette science des équations consiste à :
1. *la recherche de l'ensemble des solutions d'équations*
(avec le constat qu'il y a stabilité de cet ensemble moyennant certaines lois de compositions internes ou externes, ce qui donnera le point 2.) *;*
2. *Structuration de l'ensemble des solutions d'équations, c'est-à-dire munir cet ensemble de loi de composition interne ou de loi de composition externe (moyennant un ou des ensembles structurés) avec des propriétés avérées.*
3. *Etudier les applications entre des ensembles structurés de même type avec la propriété de la transparence des structures en présence, ces applications sont appélées homomorphismes ;*
4. *Structuration de l'ensemble des homomorphismes.*
Le nom de l'algèbre est lié au nom des équations auquelles on a affaire.
Exemple : Les équations linéaires constituent les ingrédients de l'algèbre linéaire, les équations polynômiales constituent les ingrédients de l'algèbre des polynômes.
Le rôle de **l'algèbre linéaire** est de traiter pêle-mêle des équations linéaires, la structuration naturelle de l'ensemble des solutions d'équations linéaires qui est une structure d'espace vectoriel et les calculs possibles avec les vecteurs ou les homomorphismes linéaires ou leurs représentations moyennant des bases sur les espaces vectoriels en question.
En ce qui concerne ce cours, c'est à la fois une invitation au voyage dans les contrées de l'algèbre linéaire, et un accompagnement à la gare d'où l'on embarque seul pour le voyage en question. Bon voyage !

Chapitre 1

MATRICES

1.1 Présentation des matrices de type (p, q) sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif.
Comme exemples de corps commutatifs, vous avez : $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$.
Définition p et q étant deux entiers, $p \geq 1, q \geq 1$,
une **matrice** $p \times q$ ou de type (p, q) est, par définition, un tableau rectanglaire de scalaires(ou nombres) appartenant à $\mathbb{K}$, rangés horizontalement ou verticalement, où une rangée horizontale est appelée **ligne** et une rangée verticale est appelée **colonne**. Les rangées figurent dans **deux parenthèses** ou deux **crochets** et la matrice est désignée par une lettre majuscule. Le nombre de rangées horizontales est le nombre de lignes p et le nombre de rangées verticales est le nombre de colonnes q.
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}$$

une matrice à p lignes et q colonnes d'éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$; l'élément a_{ij} s'appelle **terme**, **coefficient** ou **composante** de la matrice A ; l'indice i correspond à la ligne de a_{ij} , l'indice j à la colonne de a_{ij}. On emploie aussi la notation

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} .$$

Ceci est la $2^{ème}$ ligne : $a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2q}$; la $4^{ième}$ colonne est : $\begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{p4} \end{matrix}$.

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, on peut écrire une matrice suivant ses lignes : $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{bmatrix}$; $1 \leq i \leq p$,

ou suivant ses colonnes : $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{bmatrix}$; $1 \leq j \leq q$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2 & \pi & \frac{7}{21} & -9 & -11 & 3 \\ -3 & -2 & 0 & 8 & 9 & 15 \\ -4 & 75 & -\frac{1}{3} & -7\pi & i & 5+i \end{bmatrix} \text{ c'est une matrice de type } (4,6)$$

Ici l'élément $a_{14} = 4$, $a_{22} = \pi$, $a_{35} = 9$, $a_{33} = 0$, $a_{43} = -\dfrac{1}{3}$, $a_{46} = 5 + i$.

1.2 Quelques matrices de type (p, q)

a) Matrice uniligne : $p = 1$, q quelconque

$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{bmatrix}$.

M est de type $(1, q)$.

Exemple

$M = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 & 78 \end{bmatrix}$ de type $(1, 4)$

b) Matrice unicolonne : $q = 1$, p quelconque $M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}$.

M est de type $(p, 1)$.

Exemple

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ est de type } (6,1)$$

c) Matrice nulle de type (p, q)

C'est la matrice à p lignes et q colonnes dont les composantes sont toutes nulles.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, elle est de type $(3, 2)$.

d) Matrice carrée d'ordre $n = p = q$

C'est une matrice à n lignes et n colonnes, les termes a_{ii} sont les éléments **diagonaux** et forment **la diagonale principale**.L'autre diagonale du tableau carré s'appelle la *contre diagonale principale.*

Example

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{8}{3} \\ -9 & \frac{4}{7} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c'est une matrice carrée d'ordre 3 et les éléments diagonaux sont : $a_{11} = 1$; $a_{22} = \dfrac{4}{7}$; $a_{33} = 3$. Les éléments de la contre diagonale principale sont : $a_{31} = 0$; $a_{22} = \dfrac{4}{7}$; $a_{13} = \dfrac{8}{3}$.

e) Matrice diagonale

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en dehors de la diagonale principale sont nuls.

Exemples :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

f) Matrice unité(ou identité) d'ordre n

C'est la matrice diagonale d'ordre n telle que tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1 (et les autres nuls). On la note I_n .

Exemples

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

g) Matrice triangulaire supérieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes en-dessous de la diagonale principale sont nuls($a_{ij} = 0$ si $i > j$).

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

h) Matrice triangulaire inférieure :

C'est une matrice carrée telle que tous les termes au-dessus de la diagonale principale sont nuls($a_{ij} = 0$ si $i < j$).

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -1 & -9 \end{bmatrix}$.

i) Transposée d'une matrice :

On appelle transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ la matrice $A' = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $a'_{ij} = a_{ji}$.

La transposée de A est notée $({}^tA)$; c'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A et vice versa.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$; $\quad ({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \\ 1+i & -8 \end{bmatrix}$.

j) Opposée d'une matrice :

C'est la matrice obtenue en prenant l'opposée de chaque terme :

$$si\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\ 1\leq\ j\ \leq\ q}} \quad (-A) = (-a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}.$$

Exemple : soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1+i \\ 4 & -6 & -8 \end{bmatrix}$; on a : $(-A) = \begin{bmatrix} -(-1) & -2 & -(1+i) \\ -4 & -(-6) & -(-8) \end{bmatrix}$

ainsi $(-A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -(1+i) \\ -4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

1.3 OPERATIONS SUR LES MATRICES

1.3.1 Somme de deux matrices de même type

On définit la matrice $C = A + B$, de type (p, q) , **somme** des deux matrices de type (p, q), par ses coefficients : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q.$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1+i \\ -3 & 1 & i \end{bmatrix}$,

$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & -1+1 & 1-i+(-1+i) \\ -3+(-3) & -1+i+1 & 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & i & 2+i \end{bmatrix}$

$A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1-i \\ -3 & -1+i & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -(-1) & -(1-i) \\ -(-3) & -(-1+i) & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.3.2 Egalité de deux matrices de même type

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ p\\ 1\leq\ j\ \leq\ q}}$, de type (p, q) à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont **égales** si $A - B = 0_{M_{pq}}(\mathbb{K})$.

Contre-exemple

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, on a :

$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc $A \neq B$.

Remarques

1)Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^tA) \in M_{qp}(\mathbb{K})$ et $({}^t({}^tA)) = A$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^tA) = A$, on dit que A est une matrice **symétrique.**

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $({}^tA) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$.

3)Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si on a : $({}^tA) = -A$, on dit que A est une matrice **antisymétrique.**

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $({}^tA) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -A$

On a ainsi une loi de composition interne : **l'addition,** qui fait de **l'ensemble** $M_{pq}(\mathbb{K})$ **des matrices** $p \times q$ **un groupe commutatif.** L'élément neutre est la matrice dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls dite **matrice nulle** $0_{M_{pq}(\mathbb{K})}$.

La matrice opposée à $A = (a_{ij})$ est la matrice $(-A)$ de coefficients $(-a_{ij})$.
Remarque
Soient A, $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^t(A+B)) = ({}^tB) + ({}^tA)$.

1.3.3 Multiplication par un scalaire d'une matrice

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice λA est par définition, la matrice de coefficient λa_{ij}, où $A = (a_{ij})$.
C'est le produit du scalaire λ par la matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ noté λA.
Exemple
$A = \begin{bmatrix} 2 & -1+2i & 1-i \\ -3 & -1+i & 0 \end{bmatrix}$;
$2A = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times(-1+2i) & 2(1-i) \\ 2\times(-3) & 2(-1+i) & 2\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2+4i & 2-2i \\ -6 & -2+2i & 0 \end{bmatrix}$.
Remarque
La multiplication"." d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par une matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ est telle que $\lambda A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on dit que la multiplication "." est une loi de composition **externe** dans $M_{pq}(\mathbb{K})$ car l'opérande $\lambda \in \mathbb{K}$ mais pas à $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Propriétés de la multiplication par un scalaire d'une matrice

(i) $1.A = A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$.1 étant l'élément neutre de $(\mathbb{K}^*, \times)$.
(ii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
(iii) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$.
(iv) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, pour tout élément $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$.
Ainsi l'addition qui fait de l'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe
(qui est la multiplicationon d'un scalaire par une matrice) vérifiant les propriétés sus-mentionnées fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Remarque
Soient $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a : $({}^t(\lambda A)) = \lambda({}^tA)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.3.4 Produit de deux matrices

Le produit de matrices est **sous condition :**
$A \times B$ est **possible** si le nombre de colonnes de A est **égal** au nombre de lignes de B.
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq m \\ 1\leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i \leq n \\ 1\leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$,
on pose : $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i \leq m \\ 1\leq j \leq p}} \in M_{m,p}(\mathbb{K})$, où $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$
(on dit que l'on fait li-col, c'est-à-dire ligne par colonne) est le produit de la matrice A par B. En fait pour obtenir le terme c_{ij} de la matrice $A \times B = AB$, on multiplie les composantes de la $i^{ème}$ ligne de A par celles de la $j^{ème}$ colonne de B dans l'ordre et on fait la somme des différents produits.
On a symboliquement du point de vu des types de matrices
$(m, n)(n, p) = (m, p)$.

Exemples

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$;

$$\begin{aligned} A \times B = AB &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1\times 3+3\times 1 & -1\times(-1)+3\times(-3) & -1\times 2+3\times 4 & -1\times 1+3\times 7 \\ -4\times 3+1\times 1 & -4\times(-1)+1\times(-3) & -4\times 2+1\times 4 & -4\times 1+1\times 7 \\ 0\times 3+2\times 1 & 0\times(-1)+2\times(-3) & 0\times 2+2\times 4 & 0\times 1+2\times 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & 20 \\ -11 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 8 & 14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$B \times A$ n'est pas un produit possible car le nombre de colonnes de B égalant 4 n'est pas égal au nombre de lignes de A qui est 3.

Remarque

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

on a : $AB = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -15 & 12 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 15 & -20 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = BA$.

Ainsi

Proposition

le **produit** de matrices **n'est pas commutatif**.

Définition

Quand on a deux matrices carrées A et B telles que $A \times B = B \times A$ on dit que A et B commutent(ou permutent).

Exemple

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, on constate que

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = BA$

Ainsi A et B commutent mais le produit de matrices n'est pas commutatif.
Aussi A et B sont dites commutantes(permutantes).

Remarques

1.Formule du binôme de Newton

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, commutant(permutant) e.i. $A \times B = B \times A$, on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k B^{n-k} A^k \,;$$

$$n \geq 1,\ n \in \mathbb{N},\ \mathsf{C}_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $A \neq 0_{M_n(\mathbb{K})}$, on a $A^0 = I_n$.

Propriétés

1. $A(B+C) = AB + AC$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B, C \in M_{np}(\mathbb{K})$; ceci est la distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition.
2. $(A+B)C = AC + BC$, $\forall A, B \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{np}(\mathbb{K})$; ceci est la distributivité à droite de la multiplication par rapport à l'addition.

Vu 1) et 2) la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{np}(\mathbb{K})$,

$(\lambda A)\,B = A\,(\lambda B) = \lambda\,(AB)$.
4. $\forall A \in M_{mn}\ (\mathbb{K})$,$\forall B \in M_{np}\ (\mathbb{K})\,, \forall C \in M_{pr}\ (\mathbb{K})$,
$(AB)\,C = A\,(BC) = ABC$; ceci est l'associativitité de la multiplication des matrices.
5. $({}^{t}\,(AB)) = ({}^{t}B)\,({}^{t}A)$, $\forall A \in M_{pn}\ (\mathbb{K})\,,\ \forall B, \in M_{nq}\ (\mathbb{K})$.
6. $I_p.A = A = A.I_n$, $\forall A \in M_{pn}\ (\mathbb{K})$, I_P, I_n sont unitées d'ordre resp. p, n.

1.4 Trace d'une matrice carrée

Définition
Etant donné $A = (a_{ij}) \in M_n\,(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n (nombre de lignes = nombre de colonnes=n), on définit une application tr de $M_n\,(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ nommée **trace** telle que $tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
$M_n\,(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de type (n,n), dites aussi matrices carrée d'ordre n.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 11 & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 74 & 9 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$,

alors $tr\,(A) = 7 + (-5) + (-3) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi - 2}{2} = tr\,({}^{t}A)$.

Propriété
Etant données deux matrices $A, B \in M_n\,(\mathbb{K})$,
i) $tr\,(A + B) = tr\,(A) + tr\,(B)$
ii) $tr\,(\lambda A) = \lambda tr\,(A)$; $\lambda \in \mathbb{K}$.
iii) $tr\,(AB) = tr\,(BA)$.
iv) $tr\,(A) = tr\,({}^{t}A)$.
Je rappelle que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Remarques
1)$(M_n\ (\mathbb{K})\,, +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif .
L'élément unité se note I_n . Ainsi $\forall A \in M_n\ (\mathbb{K})$, $AI_n = I_nA = A$.
2) Avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0_{M_2(\mathbb{C})}$; on a :
$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc
$(M_n\ (\mathbb{K})\,, +, \times)$ est un anneau **non intègre**.

1.5 Matrices inversibles

Définition
$A \in M_n\,(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe $B \in M_n\ (\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
B est appelée **l'inverse** de A et se note $B = A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas.
(B et A sont des matrices carrées **de même ordre**).

Exemple

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ on a : $AB = BA = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ainsi A est inversible d'inverse B et inversemment ou A et B sont inverses l'une de l'autre.

Proposition

le produit de matrices inversibles est inversible.

Proposition

L'ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles est un groupe multiplicatif appelé le groupe linéaire.

1.6 Matrices équivalentes et matrices semblables

Définitions

i) Deux matrices $A,\ B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** s'ils existent $P \in M_p(\mathbb{K})$ inversible et $Q \in M_q(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBQ \Leftrightarrow P^{-1}AQ^{-1} = B$.

ii) Deux matrices $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = P^{-1}BP \Leftrightarrow PA = BP \Leftrightarrow PAP^{-1} = B \Leftrightarrow AP^{-1} = P^{-1}B$

ce qui entrainera que $tr(A) = tr(B)$.

Exemples

i) Soient $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Soit $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ avec $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On constate que $PP' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aussi $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$

Soit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On constate que $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q'$

Aussi $PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$

$PAQ = R$.

On a bien $PAQ = R$ avec $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible, $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ et $Q \in M_4(\mathbb{R})$ inversible donc A et R sont équivalentes.

ii) Soient $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $P' = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

On a : $PP' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aussi $P'P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$

On constate que :

$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} = D.$

donc M et D sont sont semblables.

Remarque

Deux matrices semblables **sont équivalentes.**Mais deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement semblables, il suffit qu'elles ne soient pas carrées.

1.7 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition

Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle *opérations élémentaires* sur A l'une des transformations suivantes :

1. Ajouter à une colonne(resp. ligne) de A le produit par un élément de $\mathbb{K}^*$ d'une **autre** colonne(resp. ligne) : on parle de **transvection** sur les colonnes (resp. lignes) de A.

Exemple

soit $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ en faisant $C_1' = C_1 + (-2)\, C_3$ on a :

$$B' = \begin{bmatrix} 3+(-2)\times 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1+(-2)\times 4 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -7 & -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Evidemment on a B équivalente à B', ce qui se note : $B \sim B'$
qui se lit B équivalente à B'.

2. Permuter les colonnes(resp. lignes) de A.

Exemple

soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ permutons L_1 et L_3, on a :

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Evidemment on a A équivalente à A', ce qui se note : $A \sim A'$
qui se lit A équivalente à A'.

3. Multiplier une colonne(resp. ligne) de A par un élément de $\mathbb{K}^*$:
on parle de **dilatation** ou d'**affinité** sur A.

Exemple

soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ faisons $4L_2$, on a :

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -16 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Evidemment on a A équivalente à A', ce qui se note : $A \sim A'$
qui se lit A équivalente à A'.

Définition

Les matrices $E_{ij} \in M_{pq}(\mathbb{K})$ tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$,
si $r \neq i$ ou $s \neq j$, sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$,on a $A = \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}$.

Exemples

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R}),\ E_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{42}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{31} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+a_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_{31}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}+a_{32}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}+a_{31}E_{31}+a_{32}E_{32}$$

$$A=\sum_{\substack{1\leq\ i\ \leq\ 3\\1\leq\ j\ \leq\ 2}} a_{ij}E_{ij}\in M_{32}(\mathbb{R})$$

1.8 Matrices échelonnées

Définitions

i) Une matrice est **échelonnée** si :

• le nombre de zéros commençant une ligne(resp. colonne) croît strictement ligne par ligne(resp. colonne par colonne)jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros ou qu'il n'ait plus de ligne(resp. colonne).

Exemples

a) $A_1=\begin{bmatrix}-4&0&5&8&1&-1\\0&1&2&3&0&-2\\0&0&-7&9&10&15\\0&0&0&-3&1&9\end{bmatrix}$; $A_2=\begin{bmatrix}-4&0&5&8&1&-1\\0&1&2&3&0&-2\\0&0&-7&9&10&15\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

sont des matrices échelonnées suivant les lignes.

b) $B_1=\begin{bmatrix}-4&0&0&0\\11&7&0&0\\-5&0&-9&0\\0&0&1&-3\end{bmatrix}$; $B_2=\begin{bmatrix}-4&0&0&0&0\\11&7&0&0&0\\-5&0&-9&0&0\\0&0&1&-3&0\end{bmatrix}$

sont des matrices échelonnées suivant les colonnes.

ii) Elle est **échelonnée réduite à ligne canonique** si en plus :

• le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;

• et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemples

$A_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&0&0&-2\\0&0&1&0&10&15\\0&0&0&1&1&9\end{bmatrix}$; $A_2=\begin{bmatrix}1&0&0&8&1&-1\\0&1&0&3&0&-2\\0&0&1&9&10&15\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$.

iii) Elle est **échelonnée réduite à colonne canonique** si en plus :

• le premier coefficient non nul d'une colonne (non nulle) vaut 1 ;

• et c'est le seul élément non nul de sa ligne.

Exemples

$B_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&-3\end{bmatrix}$; $B_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$.

iv) Elle est **échelonnée réduite** quand elle est à la fois échelonnée réduite à ligne et colonne canoniques.

Exemples

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_4 \mid 0 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

et toutes les matrices unités(ou identités) I_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
sont des matrices échelonnées réduites.

Remarque

Dans la réduite d'une matrice non nulle échelonnée réduite,
il y a dans la première moitié ou dans le premier quart du haut une matrice unité(ou identité), I_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$, ou la reduite est carrément une matrice identité.

v) **Echélonner réduire une matrice** A c'est lui trouver une matrice échélonnée réduite A' qui lui soit équivalente.

Lemme

Les opérations élémentaires sur les matrices servent à échelonner des matrices et les éléments non nuls d'une ligne ou (resp.d'une colonne) qui permette d'avoir des zéros sur les lignes qui suivent ou (resp.les colonnes qui suivent) sont appelés **pivots.**

Exemples

a) Échélonnage suivant les lignes d'une matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -8 \\ 0 & 11 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix} .$$

Les pivots ici, ont été : 1 ; -11.

b) Échélonnage à ligne canonique d'une matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ L_1 \end{matrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -23 & -28 \\ 0 & 1 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 - 3L_2 \\ -L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 + \frac{23}{29}L_3 \\ L_2 + \frac{9}{29}L_3 \\ \frac{1}{29}L_3 \end{matrix} .$$

Les pivots sont réduits à 1 à chaque fois.

c) Échélonnage suivant les colonnes d'une matrice

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \simeq \begin{array}{ccc} C_3 & C_2 - 2C_3 & C_1 - 4C_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -6 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & -10 \end{bmatrix}} \end{array} \simeq$$

$$B \simeq \begin{array}{c} 2C_3 - 3C_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Les pivots ici, ont été : 1 ; -4.

d) Échélonnage à colonne canonique d'une matrice

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \simeq \begin{array}{c} \frac{1}{4}C_1 \quad C_2 - \frac{3}{4}C_1 \quad C_3 - \frac{1}{4}C_1 \quad C_4 - \frac{2}{4}C_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C \simeq \begin{array}{c} -\frac{1}{9}C_2 \quad C_3 - \frac{1}{9}C_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C \simeq \begin{array}{c} \frac{1}{8}C_3 \quad C_4 - \frac{9}{8}C_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les pivots sont réduits à 1 à chaque fois.

Remarque

Une matrice A est inversible si et seulement si, échelonnée reduite elle est équivalente à une matrice **identité** de même ordre que A.

1.8.1 Inversion d'une matrice par les opérations élémentaires sur les matrices

Exemples

I) Avec opérations élémentaires sur les lignes :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; alors A est inversible.

On augmente la matrice A de la matrice unité de même nombre de ligne que A à la suite de la dernière colonne de A comme suit :

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \right] = M$$ et l'on cherchera à échelonner réduire la matrice A

Ceci étant, déroulons :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ \\ -\frac{2}{3}L_3 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 - \frac{1}{2}L_3 \end{array} .$$

Comme l'échelonnage de la matrice A sous la réduite à donner la matrice identité, alors la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

II) Avec opérations élémentaires sur les colonnes

On augmente la matrice A de la matrice unité de même nombre de colonne que A à la suite de la dernière ligne de A comme suit :

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = N$ et l'on cherchera à échelonner la matrice A sous la forme échelonné réduite

Ceci étant, déroulons :

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} \text{C}_2\text{-C}_1 \quad \text{C}_3\text{-C}_1 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ \hline\hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \approx \begin{array}{c} \text{C}_1\text{+}\tfrac{1}{2}\text{C}_2 \quad \text{-}\tfrac{1}{2}\text{C}_2 \quad \text{C}_3\text{-}\tfrac{1}{2}\text{C}_2 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline\hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{c} C_1 + \frac{1}{3}C_3 \quad C_2 + \frac{1}{3}C_3 \quad -\frac{2}{3}C_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline\hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

1.9 Rang d'une matrice

Proposition

Le rang d'une matrice échelonnée ou échelonnée reduite est égale au nombre de ses lignes non nulles(si l'échelonnage a été effectué avec les opérations élémentaires sur les lignes) ou au nombre de colonnes non nulles(si l'échelonnage a été effectué avec les opérations élémentaires sur les colonnes).

Exemples

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow rg\,(A_1) = 4\,;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 9 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg\,(A_2) = 3\,;$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg\,(B_1) = 4\,;$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 7 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg\,(B_2) = 4.$$

Proposition

Etant donnée une matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, à l'aide des opérations élémentaires sur A, A sera équivalente à une matrice de la forme suivante : $R = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r(q-r)} \\ 0_{(p-r)r} & 0_{(p-r)(q-r)} \end{bmatrix}$

où $r \leq \inf(p, q)$, I_r est la matrice unité d'ordre r et

0_{st} est la matrice identiquement nulle avec s lignes et t colonnes.

R est la matrice échelonnée réduite de A. On appelle l'entier r le rang de la matrice A et il se note $rg\,(A) = r$.

Proposition

$rg\,(A) = rg\,({}^tA)$ pour tout type de matrice A.

Proposition

Deux matrices sont **équivalentes ssi** elles ont le même rang.

Preuve

Soient $A, B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ de même rang, alors ils existent $P_1,\ P_2 \in GL_P(\mathbb{K})$ et $Q_1, Q_2 \in GL_q(\mathbb{K})$ telles que

$P_1AQ_1 = R = P_2BQ_2 \Longleftrightarrow P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1} = B$ avec

$P_2^{-1}P_1 \in GL_P(\mathbb{K})$ et $Q_1Q_2^{-1} \in GL_q(\mathbb{K})$, ce qui veut dire que A et B sont équivalentes. $GL_P(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p inversibles.

R est la matrice échelonnée réduite à la fois de A et de B, définissant le même rang pour A et B.

Remarque

Toute opération élémentaire sur une matrice A, produit une matrice A' qui est équivalente à A. Donc $rg\,(A) = rg\,(A')$.

Remarque

Le rang de A est indépendante des opérations élémentaires ayant permis son échelonnage ou son échelonnage réduit.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, recherchons le rang de A.

Nous allons faire des opérations élémentaires sur les lignes de A en augmentant A de la matrice identité de même nombre de lignes que A, à la suite de la dernière colonne de A. Et on fait les opérations élémentaires sur la matrice augmentée. Ainsi d'entée, on a :

$$\left[\begin{array}{c}\underbrace{\begin{array}{cccc}5&2&4&7\\3&2&0&1\\1&0&2&3\end{array}}_{A}\left|\underbrace{\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}}_{I_3}\right.\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc}1&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{7}{5}&\frac{1}{5}&0&0\\0&\frac{4}{5}&-\frac{12}{5}&-\frac{16}{5}&-\frac{3}{5}&1&0\\0&-\frac{2}{5}&\frac{6}{5}&\frac{8}{5}&-\frac{1}{5}&0&1\end{array}\right]\begin{array}{c}\frac{1}{5}L_1\\L_2-\frac{3}{5}L_1\\L_3-\frac{1}{5}L_1\end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{c}\underbrace{\begin{array}{cccc}1&0&2&3\\0&1&-3&-4\\0&0&0&0\end{array}}_{R'}\left|\underbrace{\begin{array}{ccc}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{3}{4}&\frac{5}{4}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{array}}_{P}\right.\end{array}\right]\begin{array}{c}L_1-\frac{1}{2}L_2\\\frac{5}{4}L_2\\L_3+\frac{1}{2}L_2\end{array}$$

Evaluons :

$$PA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\-\frac{3}{4}&\frac{5}{4}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&2&4&7\\3&2&0&1\\1&0&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&-3&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

On a donc : $PA=R'$.

Définition

R' est dite matrice échélonnée à lignes canoniques de A car le premier terme non nul d'une ligne non nulle est 1.

Remarques

1.Le meilleur choix pour opérations élémentaires sur lignes ou colonnes d'une matrice de type (p,q) : il faut choisir de travailler sur les lignes si $p<q$ sinon sur les colonnes.

2. Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même ligne, il faut opérer avec les colonnes.

3.Quand on veut travailler avec deux éléments d'une même colonne, il faut opérer avec les lignes.

4.On peut d'or et déjà compter le nombre de lignes non nulles de R' (parce qu'on a travaillé sur les lignes), et ce nombre est égal au rang de A. Il en serait de même si on avait travaillé sur les colonnes.

Suite de ce qui précède.

On continue les opérations élémentaires sur les colonnes cette fois-ci, en augmentant R' à la suite de sa troisième ligne par la matrice identité de même nombre de colonnes que R', c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&-3&-4\\0&0&0&0\\\hline\hline 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}&&C_3\text{-}2C_1&C_4\text{-}3C_1\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-3&-4\\0&0&0&0\\\hline\hline 1&0&-2&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}&&C_3\text{+}3C_2&C_4\text{+}4C_2\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\\hline\hline 1&0&-2&-3\\0&1&3&4\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}.$$

Ici on a : $R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ et on pose $Q=\begin{bmatrix}1&0&-2&-3\\0&1&3&4\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Evaluons :

$$PAQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $PAQ = R$.

Ainsi ayant $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec $Q' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a : $QQ' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

de même $Q'Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Donc Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = Q'$.

Ayant $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, avec $P' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

on a :

$PP' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

de même $P'P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = P'$.

Comme on a : $PAQ = R$ et que P et Q sont des matrices carrées inversibles d'ordre respectif 3 et 4 on a bien A est équivalente à R et le rang de A est 2.

Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si le rang de A est égal à n.

Proposition

Deux matrices carrées **semblables**, ont nécessairement
la même trace et le même rang.

Remarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

Le rang de $A =$ le rang de $B = 1$, mais elles ne sont pas semblables
car $tr(A) = 0 \neq 1 = tr(B)$, alors que si elles étaient semblables,
elles devraient avoir nécessairement la même trace.

Exercice 1

A l'aide des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, décrire l'ensemble des triplets réels (a, b, c) rendant le rang de la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ 2 & -1 & c & a \end{bmatrix}$

égal à 2.

Correction de l'exo. 1

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ -1 & 2 & b & c \\ 2 & -1 & c & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & b+a & c+b \\ 0 & -3 & c-2a & a-2b \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 3 & b+a & c+b \\ 0 & 0 & b-a+c & a-b+c \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array}$$

Alors M serait de rang 2 si $\begin{cases} b - a + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow a = b$

Dés lors pour tout triplet $(a, a, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ va entrainer que le rang de M est 2.

Exercice 2

1) Réduire à la forme échélonnée puis à la forme ligne canonique les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Si pour $i = 1, 2$, B_i est la forme ligne canonique de A_i déterminer la matrice P_i telle que $B_i = P_i A_i$.

2) Réduire à la forme échélonnée puis à la forme colonne canonique les matrices précédentes.

Si pour $i = 1, 2$, C_i est la forme ligne canonique de A_i déterminer la matrice Q_i telle que $C_i = A_i Q_i$.

Correction de l'exo.2

1) On augmente la matrice A_1 à la suite de sa dernière colonne par la matrice I_4 car le nombre de lignes de A_1 est 4.

Aussi on échelonne réduire à ligne canonique la matrice A_1 avec les opérations élémentaires sur les lignes :

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -L_3 \\ L_2 + L_3 \\ L_1 + 2L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 3L_2 \\ L_4 - 2L_2 \end{array} .$$

Evaluons :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \times A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

On refait la même chose pour A_2 ; on aura donc :

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_3 \\ L_2+2L_3 \\ L_1 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -23 & -28 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -9 & -10 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1-3L_2 \\ -L_2 \\ L_3+3L_2 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1+\frac{23}{29}L_3 \\ L_2+\frac{9}{29}L_3 \\ \frac{1}{29}L_3 \end{array}.$$

Evaluons :

$$\begin{bmatrix} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{bmatrix} \times A_2 = \begin{bmatrix} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P_2 = \begin{bmatrix} \frac{23}{29} & -\frac{18}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{9}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{4}{29} \\ \frac{1}{29} & \frac{3}{29} & \frac{6}{29} \end{bmatrix}$.

2) On augmente la matrice A_1 à la suite de sa dernière ligne par la matrice I_3 car le nombre de colonnes de A_1 est 3.
Aussi on échelonne réduire à colonne canonique la matrice A_1 avec
les opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}C_1 & C_2+\frac{3}{2}C_1 & C_2+2C_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 11 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline\hline \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1-\frac{3}{11}C_2 & \frac{2}{11}C_2 & C_3-2C_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{11} & \frac{-3}{11} & 0 \\ \frac{-6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \\ \hline\hline \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ \frac{-3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Evaluons :

$$A_1 \times \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -\frac{6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi : $Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -1 \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & 0 \\ -\frac{6}{11} & \frac{4}{11} & 0 \end{bmatrix}$.

On refait la même chose pour A_2 ; on aura donc :

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ \hline\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{-C}_4 & \text{C}_2\text{+3C}_4 & \text{C}_3\text{+2C}_4 & \text{C}_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 23 & 13 & -2 \\ -2 & 3 & 8 & 1 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{C}_1\text{-3C}_4 & \text{-}\frac{1}{2}\text{C}_4 & \text{C}_3\text{+}\frac{13}{2}\text{C}_4 & \text{C}_2\text{+}\frac{23}{2}\text{C}_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{29}{2} & \frac{29}{2} \\ \hline\hline -3 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & \frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{C}_1\text{+}\frac{10}{29}\text{C}_3 & \text{C}_2\text{+}\frac{1}{29}\text{C}_3 & \frac{2}{29}\text{C}_3 & \text{C}_4\text{-C}_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Evaluons :

$$A_2 \times \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi $Q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{22}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{13}{29} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{10}{29} & \frac{1}{29} & \frac{2}{29} & -1 \\ -\frac{9}{29} & \frac{2}{29} & \frac{4}{29} & 1 \end{bmatrix}$ et $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Chapitre 2

CALCUL DE DÉTERMINANTS

Le déterminant est un simple **scalaire**(nombre) calculé à partir des éléments d'une matrice **carrée**. Ce scalaire est nul si la matrice carrée en question est non inversible.

2.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On appelle **déterminant de A** le nombre **ad** $-$ **bc**.

$$\text{On note } \mathbf{dét\ A} \text{ ou } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Exemple

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 4 = -14$

2.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. On appelle déterminant de A le nombre $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.

$$\text{On note } \det A \text{ ou } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2.2.1 Calcul d'un déterminant d'ordre 3 par la méthode de Sarrus

On complète par les deux premières colonnes la suite de la troisième colonne (ou par les deux premières lignes la suite de la troisième ligne) et on fait les produits 3 à 3 parallèlement à la **diagonale principale** et les produits 3 à 3 parallèlement à la **contre-diagonale principale** ensuite, on **somme** en comptant les produits parallèles à la diagonale principale positivement et ceux de la contre-diagonale principale négativement.

$$\det A = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Ou $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Remarque : La méthode de Sarrus ne s'applique qu'au déterminant d'**ordre 3**.

2.2.2 Calcul du déterminant par le développement suivant une ligne ou une colonne.

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq n}$ pour l'élément a_{ij} , X_{ij} le déterminant obtenu en éliminant la ligne et la colonne de a_{ij} est son **mineur ;** le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, X_{ij}$ est son **cofacteur.**

Remarque

Pour tout a_{ij} élément de A matrice carrée,

Si$(i + j)$ est paire X_{ij} et C_{ij} sont égaux sinon ils sont opposés l'un à l'autre.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Quand on élimine la ligne et la colonne de a_{11} , on obtient X_{11} son mineur qui est : $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = X_{11}$.

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{12} , on obtient X_{12} son mineur qui est : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{12} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -X_{12}$

quand on élimine la ligne et la colonne de a_{13} , on obtient X_{13} son mineur qui est : $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ et son cofacteur est :

$C_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = X_{13}$.

Methode

Developpement suivant la $1^{ère}$ ligne pour calculer $\det A$;
on a : $\det A = a_{11} \times C_{11} + a_{12} \times C_{12} + a_{13} \times C_{13}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) \\
&\quad + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\
&= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) \\
&\quad - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right).
\end{aligned}$$

$\det A$ s'obtient aussi par le développement suivant une colonne,
développons $\det A$ suivant la $2^{ième}$ colonne de A qui est : $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{32} \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) \\
&\quad - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)
\end{aligned}$$

$$\det A = a_{12} \times C_{12} + a_{22} \times C_{22} + a_{32} \times C_{32}.$$

Exemples pratiques

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ développons suivant la $2^{ème}$ ligne.

$$\begin{aligned}
\det A &= 3 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= -3\left(-2 \times 5 - 4 \times 3\right) - 1 \times \left(-1 \times 4 - (-1) \times (-2)\right) \\
&= -3\left(-22\right) - (-6) = 72.
\end{aligned}$$

En développant $\det A$ suivant la $1^{ère}$ligne on a :

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1) \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\
&\quad + 3 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 72.
\end{aligned}$$

C'est plus long à calculer.
Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ ligne :

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-5) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -5 \times \left(-4 \times (-2) - (-1) \times 2\right) = -50.
\end{aligned}$$

Développons $\det B$ suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(-4) \times (0 \times 0 - (-2) \times (-5)) + 2\,(0 \times 2 - (-1) \times (-5))$$
$$= -40 - 10 = -50.$$

Le calcul de $\det B$ avec le développement suivant la $2^{ième}$ ligne

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-4) \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+2 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4)\,(10) - (10) + 0 = -50.$$

C'est plus long à effectuer que les précédents.

Remarques

(i) Quand l'on a choisi une ligne ou une colonne suivant laquelle le calcul du déterminant d'une matrice sera développé, **le déterminant est égal à la somme des produits de chaque élément de ladite ligne ou colonne par son cofacteur**.

(ii) En choisissant une colonne ou une ligne où il y a plus de **zéros**, on a moins de termes dans le développé.

(iii) Par cette méthode du développement suivant une ligne ou une colonne, on constate que dans le développé l'**ordre** de la matrice dont on calcule le déterminant **s'abaisse**.

2.3 Calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n supérieur ou égal à 3

On se ramène à des calculs de déterminants d'ordre inférieur à n en développons suivant une ligne ou une colonne.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

développons suivant la $4^{ème}$ colonne ; $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \left[2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right]$$
$$= 4\,[2\,(1-8) - 5\,(1+6)] = 4\,(-14-35)$$
$$= 4\,(-49) = -196.$$

Aussi $\det A$ avec le développement suivant la deuxième ligne de A sera bien long à écrire en effet :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Théorème
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq\ i,\ j\ \leq\ n}$.
Déterminant de A développé par rapport à la i-ième ligne :

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}.$$

Déterminant de A développé par rapport à la j-ième colonne :

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}.$$

Remarque
Pour développer suivant les lignes ou les colonnes, il vaut mieux choisir celles qui renferment le plus de zéros pour réduire le nombre de calculs.

2.4 Propriétés des déterminants

1) (i) Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$(commutatif).
Alors on a : $\det(AB) = \det A \times \det B$
$(\det(AB) = \det A \times \det B = \det B \times \det A = \det(BA))$.
Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

on a : $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -15 \\ -6 & -14 & 13 \end{bmatrix}$

$\det(AB) = \begin{vmatrix} 14 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -15 \\ -6 & -14 & 13 \end{vmatrix} = -3600$

on sait ausi que $\det A = 72$ et $\det B = -50$ et $\det A \times \det B = 72 \times (-50) = -3600$
on a bien $\det(AB) = \det A \times \det B$.
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^{ordre(A)} \det A = \lambda^n \det A$.
Exemple

$$det \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right) = 2^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det({}^tA)$.

2) Le déterminant d'une matrice triangulaire, en particulier celui d'une matrice diagonale, est égal au produit des éléments diagonaux
(c'est-à-dire des éléments de la diagonale principale).
Par conséquent le déterminant d'une matrice unité est égale à 1.
Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-2) = -6.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) \times (-5) = 30.$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3) Le déterminant ne change pas quand on **ajoute** à une *ligne* une combinaison des **autres** *lignes* ; en particulier, on peut remplacer une ligne par la somme de toutes les lignes ou encore ajouter à une ligne λ multiplié par une autre ligne où λ est un scalaire non nul.
(Dans la propriété **3**) en remplacant ligne(s) par colonne(s), on a le même résultat).

Exemple

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$, en ajoutant à la $3^{ème}$ ligne, deux fois la $1^{ère}$ ligne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$, je développe par rapport à la $2^{ème}$ colonne,

$$\det A = -(-2) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 2\,(33+3) = 72.$$

Remarque

Il est plus intéressant de faire des manipulations (légitimes) qui font apparaître des zéros dans le déterminant afin d'en faciliter le calcul(voir supra).

4) Le déterminant d'une matrice dont une ligne ou une colonne est formée de zéros est un déterminant nul. Le déterminant d'une matrice dont une ligne(resp. une colonne) est une combinaison des autres lignes (resp. des autres colonnes) est un déterminant nul.Aussi si deux lignes(resp.deux colonnes) sont proportionnelles dans un déterminant, le déterminant est nul.

Exemple

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$, car la $2^{ème}$ colonne est égale à deux fois la $1^{ère}$ colonne.

5) Le déterminant est linéaire en ses lignes et colonnes respectivement.

(pour ne pas dire multilinéaire suivant les lignes ou les colonnes)

Cela signifie : étant donnée A une matrice carrée d'ordre n ; on a :

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} ; 1 \leq i \leq n.$$

(i) $\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i + C_i' & \cdots & C_n \end{bmatrix} =$
$\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i' & \cdots & C_n \end{bmatrix}$

$$\text{ou } (i') \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i + L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i' \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Exemples

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & a+b & b^2 \\ a & a-b^2 & b \\ a^2 & a^3+b & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & -b^2 & b \\ a^2 & b & ab \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & b & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & -b^2 & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

$$(i') \begin{vmatrix} 2-b^2 & a+b & b^2+b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b^2 & b & b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -b^2 & a & b \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & b & b^2 \\ a & a & b \\ a^2 & a^3 & ab \end{vmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$ un corps.

(ii)
$\det\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & \beta C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \beta \det\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix}$;
$\beta \in \mathbb{K}$ un corps.

ou $\left((ii)'\right)$ $\det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ \gamma L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \gamma \det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$;

$\gamma \in \mathbb{K}$ un corps.

Exemple

$$(ii)\ \det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 17\times 3 \\ 3 & 0 & 17\times 1 \\ -3 & 0 & 17\times 11 \end{vmatrix} = \det A = 17 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\left((ii)'\right) \begin{vmatrix} -23\times(-1) & -23\times(-2) & -23\times 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-23) \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

6) Le déterminant une forme **alternée :** cela signifie étant donnée A une matrice carrée d'oredre n à coeffients dans $\mathbb{K}$, $\det A \in \mathbb{K}$, et avec

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix};\ 1 \leq i,\ j \leq n.$$

$$\det A = \det\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det A$$

$\det A = \det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{bmatrix}$
$\det A = -\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
$\det \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{bmatrix} = -\det A\,;\ 1 \leq i,\ j \leq n.$
Tout ceci signifie que lorsqu'on permute deux lignes (ou deux colonnes) dans un déterminant le déterminant est changé en son opposé.

Exemple

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 72, \text{ mais } \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -72 = -\det A$$

car j'ai permuté la $2^{ième}$ et la $3^{ième}$ lignes.

7) Soients $M \in M_r\ (\mathbb{K})$, $N \in M_{rs}(\mathbb{K})$ et $P \in M_s\ (\mathbb{K})$ alors $\begin{vmatrix} M & N \\ 0 & P \end{vmatrix} = |M|\,|P|$.

8) Soients $A_i \in M_{r_i}(\mathbb{K})$ où $1 \leq i \leq n$, alors $\begin{vmatrix} A_1 & * & * & * \\ 0 & A_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} |A_i\ |$.

9) Si deux matrices $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables, i.e. $A = P^{-1}BP$.
$\forall m \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, comme $(A + mI_n)^k = P^{-1}(B + mI_n)^k P$, alors
$rang\,(A + mI_n)^k = rang\,(B + mI_n)^k$,
$\det (A + mI_n)^k = \det (B + mI_n)^k$ et
$trace\,(A + mI_n)^k = trace\,(B + mI_n)^k$.

Remarque

1)Lorsque deux matrices carrées sont **semblables**, elles ont **nécessairement** les mêmes trace, rang et déterminant. Mais cela ne suffit pas pour être semblables.
2)Ausi est-il clair que deux matrices qui n'ont pas la même trace ou pas le même rang ou pas le même déterminant, ne peuvent être semblables.

Remarque

Voici deux matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
On a le rang de A = au rang de $B = 1$, $\det(A) = \det(B) = 0$,
$tr\,(A) = tr\,(B) = 0$, mais A et B ne sont pas semblables car
$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ce sont deux matrices
inversibles et on a : $PAQ = B$, donc A et B sont équivalentes,
mais seraient semblables si $P^{-1} = Q$, alors qu'avec
$P \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \times P = I_2$, on a
$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \neq Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, donc on peut conclure
que A et B ne sont pas semblables, alors qu'elles ont le même rang,
le même déterminant, et la même trace.
En résumé : Avoir le même rang , le même déterminant, et la même trace,
pour des matrices carrés de même ordre, sont des conditions **nécessaires**
pour qu'elles soient semblables, mais pas **suffisantes**.

2.5 Inverse d'une matrice carrée

Définition
Une matrice **carrée** A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice
(carrée d'ordre n)
B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
B est alors appelée **inverse** de la matrice A.
Exemple
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. On vérifie que pour $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$,
on a : $AB = BA = I_2$.
Donc A est inversible et B est inverse de la matrice A.
Définition
Etant données deux matrices A et B tel que $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.
Proposition
Deux matrices qui commutent sont **carrées** de **même ordre**.
Théorème
Une matrice **carrée** A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Si A est inversible, son inverse est unique et inversible.
On la note A^{-1} et on a : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$.
Exemple
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\det A = -2 \neq 0$ donc A est inversible, avec $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
on constate que : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
donc $A^{-1} = B$ et $\det B = \det A^{-1} = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{(-2)} = \dfrac{1}{\det A}$.
Proposition
Deux matrices A et B carrées de même ordre n tel que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) sont
inversibles et d'inverse l'une de l'autre.

2.5.1 Propriétés de la matrice inverse

Si A et B sont inversibles de même ordre, on a :

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}.A^{-1}$, où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. $\left({}^t\left(A^{-1}\right)\right) = \left({}^t(A)\right)^{-1}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.5.2 Inversion d'une matrice par sa comatrice

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij}
le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j}\, X_{ij}$
où X_{ij} est le déterminant obtenu en éliminant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de A.
La matrice des cofacteurs de A est la matrice notée
$com\,(A) = \left((-1)^{i+j}\, X_{ij}\right)_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n} = (C_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ n}$.
appelée la **comatrice** de A. le determinant extrait X_{ij} est appelé le **mineur** de a_{ij}.

Exemple pratique

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$. Notons $A = (a_{ij})_{1\leq\ i,\ j\ \leq\ 3}$.

Le cofacteur de $a_{11} = 1$ est $C_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 9$, on a $X_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

Le cofacteur de $a_{32} = -5$ est $C_{32} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, on a $X_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Ainsi de suite.

La comatrice de A est donc $comA = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Proposition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a :
$(\det A)\,.I_n = A.com\left({}^tA\right) = com\left({}^tA\right).A = A\left({}^tcomA\right) = \left({}^tcomA\right).A$
car $\left({}^tcomA\right) = com\left({}^tA\right)$.

Théorème

Si A est une matrice inversible alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \times com\left({}^tA\right) = \dfrac{1}{\det A} \times \left({}^tcom\,(A)\right)$
où $\left({}^tA\right)$ désigne la transposée de A, $com\left({}^tA\right)$ désigne la comatrice de la transposée de A et $\left({}^tcom\,(A)\right)$ désigne la transposée de la comatrice de A.

Définition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matrice $\left({}^tcomA\right) = com\left({}^tA\right)$ s'appelle la matrice **adjointe** de A.

Remarque

Soit une matrice inversible A, son inverse est notée $A^{-1} \neq \dfrac{1}{A}$ qui n'existe pas.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, A est -elle inversible ?

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2$, à la $1^{ère}$ colonne, j'ai fait la

$1^{ère}$ colonne plus la $3^{ème}$ colonne afin d'avoir plus de zéro dans mon déterminant pour ne pas avoir beaucoup de termes à développer. Comme $\det A = 2 \neq 0$, alors A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times com\left({}^tA\right) = \frac{1}{\det A} \times \left({}^tcom\left(A\right)\right).$$

$$\left({}^tA\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$com\left({}^tA\right) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \left({}^tcom\left(A\right)\right).$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -4 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.6 Rang d'une matrice

Proposition

$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq n \\ 1\leq j \leq m}}$. On a $rgA \leq \min(n, m)$.

Si $m = n$, et que $rgA = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

Exemples

1)Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 15 & -1 & -8 & -7 \\ \pi & \frac{1}{2} & -71 & -45 & 0 & -17 \end{bmatrix}$; alors $rg\left(A\right) \leq 3$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi & -1 & 5 & 7 \\ 17 & 1 & 3 & 11 \\ \frac{1}{2} & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A\right) = -36\pi - 99 \neq 0$

$\Rightarrow rg\left(A\right) = 4$.

Proposition

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i \leq n \\ 1\leq j \leq m}}$ alors rgA est le plus grand entier naturel s qui est tel qu'on puisse extraire de A une matrice d'ordre s de déterminant $\neq 0$ (avec permutation des colonnes(resp. lignes) de A si necessaire).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ comme $2 \geq rgA$, donc $rgA = 2$.

Remarque

$rg\left(A\right) = 0 \Leftrightarrow$ toutes les composantes de la matrice A sont nulles.

Chapitre 3

RÉSOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINÉAIRES

Définitions
(i) De maniére générale, on appelle équation linéaire d'inconnues $x_1\,;\,...\,;\,x_n$ (une combinaison linéaire des $x_1\,;\,...\,;\,x_n$ égaliant b)
toute égalité de la forme : $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b \Leftrightarrow (E)$
où $a_1; ...\,; a_n$ et b sont des nombres(réels ou complexes)
Il importe d'insister ici que ces équations linéaires sont implicites, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les inconnues, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre ces inconnues.
(ii) Résoudre une équation signifie donc la rendre explicite, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les inconnues peuvent prendre.
(iii) Une solution de l'équation linéaire (E) est un n-uple $(s_1; ....; s_n)$ de valeurs respectives des inconnues $x_1\,;\,...\,;\,x_n$ qui satisfont l'équation (E).
Autrement dit : $a_1s_1 + ... + a_ns_n = b$.
Exemple
$-2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9$ est une équation linéaire d'inconnues x_1, x_2, x_3.
Définition
Un ensemble **fini** d'équations linéaires d'inconnues $x_1\,;\,...\,;\,x_n$ s'appelle un système d'équations linéaires d'inconnues $x_1\,;\,...\,;\,x_n$.
Exemples
(i) $(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{array}\right.$ (S_1) est un système de deux équations à trois inconnues : x_1, x_2, x_3.
(ii) $(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_4 - 3x_5 = -8 \end{array}\right.$ (S_2) est un système de trois équations à cinq inconnues : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
(iii) Le système
$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{array}\right.$$
admet comme solution
$x_1 = -18;\ x_2 = -6;\ x_3 = 1.$
Par contre
$x_1 = 7\,;\ x_2 = 2\,;\ x_3 = 0$
ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution

du système.

Définition

Un système d'équations est dit incompatible ou inconsistant s'il n'admet pas de solutions, c'est-à-dire que l'ensemble solution c'est l'ensemble vide.

Exemple

Le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

est clairement incompatible donc $S_{\mathbb{R}^2} = \{\} = \varnothing$.

Définition

Soient $n, m \geq 1$.

On appelle système de m équations à n inconnues tout système (S) de la forme :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\, x_1 \;+ a_{12}\, x_2 \;+ ... + a_{1n}\, x_n & = & b_1 \; (E_1) \\ a_{21}\, x_1 \;+ a_{22}\, x_2 \;+ ... + a_{2n}\, x_n & = & b_2 \; (E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\, x_1 \;+ a_{m2}\, x_2 \;+ ... + a_{mn}\, x_n & = & b_m \; (E_m) \end{cases},$$

où $a_{ij}\,, b_i$ sont des scalaires donnés ; $x_1\,, x_2\,, ..., x_n$ sont des inconnues et (E_i) la i-ième équation de (S) ; $\forall 1 \leq i \leq m$.

La matrice $A = (a_{ij}\,)_{\substack{1\leq\, i\, \leq\, m \\ 1\leq\, j\, \leq\, n}}$ est la matrice associée à (S)(dite aussi la matrice de (S)).

Il est à noter que la j-ième colonne de A est composée des coéfficients de l'inconnue x_j dans les différentes équations du système de la première équation(E_1) à la dernière équation(E_m) ; $\forall 1 \leq j \leq n$.

Les $(b_i)_{1\leq\, i\, \leq\, m}$ sont les seconds membres de (S) , et (S) est dit *homogène* si $b_i \; = 0$ $\forall 1 \leq i \leq m$.

Ecriture matricielle de (S).

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Alors $(S) \Longleftrightarrow AX = B$.

Exemples

1)Considérons le système linéaire

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 7 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Alors $(S) \Longleftrightarrow AX = B$

2)Considérons le système linéaire homogène

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Alors } (S) \Leftrightarrow AX = B = 0_{M_{31}(\mathbb{R})}.$$

3.1 Résolution du système (S) avec la matrice augmentée

Je rappelle le système

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} a_{11}\,x_1 & +a_{12}\,x_2 & +\dots+a_{1n}\,x_n & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 & +a_{22}\,x_2 & +\dots+a_{2n}\,x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots\ \ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & +a_{m2}\,x_2 & +\dots+a_{mn}\,x_n & = b_m \end{array} \right. .$$

Définition

Nous obtenons la matrice augmentée associée au système (S) en adjoingnant à la dernière colonne de la matrice du système A une colonne constituée des b_i, les seconds membres des équations de (S).

De là :

La matrice augmentée associée au système (S) est alors :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] = [\ A \mid B\ ];$$

où $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ la matrice associée à (S)

et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ la matrice colonne des seconds membres de (S).

Exemple

Considérons le système linéaire

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{array} \right.$$

Sa matrice augmentée de (S)est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array} \right] = [\ A \mid B\ ];$$

où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix}$ la matrice associée à (S)

et $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ la matrice colonne des seconds membres de (S).

La méthode de base pour résoudre un système d'équations linéaires est de remplacer le système par un autre, plus simple, ayant le même ensemble de solutions.

Ceci se fait par une succession d'opérations, appelées opérations élémentaires : qui consiste à : au choix

(1) multiplier une équation par une constante non nulle ;

(2) permuter deux équations ;

(3) ajouter un multiple d'une équation à une autre équation.

Les opérations (1), (2) et (3) ne changent pas l'ensemble des solutions.

Elles correspondent à des opérations élémentaires sur les **lignes** de la matrice augmentée.

Ces opérations sont les suivantes :

(1) multiplier une ligne par une constante non nulle ;

(2) permuter deux lignes ;

(3) ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Proposition

Soit $(S) \Leftrightarrow AX = B$, si $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right]$ alors $(S) \Leftrightarrow A'X = B'$.

Exemple

Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée au système est :

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right]$, on va chercher à échelonner réduire à ligne canonique la matrice du système en faisant des opérations élémentaires sur les **lignes(**que sur les lignes qui représentent les équations**)** de la matrice augmentée ; on a :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{3}L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 - 4L_3 \\ L_2 - 3L_3 \\ \\ \end{array}.$$

ce qui donne matriciellement : $(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2, 4, -1)\}$.

Nous remarquons que les opérations élémentaires peuvent être faites uniquement sur la matrice augmentée pour revenir à la fin au système d'équations. C'est ce que nous avons fait.
On obtient ainsi l'unique solution du système : $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ et $x_3 = -1$.
Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; 4; -1)\}$.
Remarque très importante
Quand on finit de résoudre une équation ou un systéme d'équations, il faut toujours donné l'ensemble solution clairement.
Proposition
Etant donné un sytème (S) de matrice A et de matrice **augmentée** M, le système est compatible
(c'est-à-dire n'admet pas l'ensemble vide comme solution) ssi
le rang de A est égal au rang de M i.e. $rg\,(A) = rg\,(M)$.

3.2 Méthode de résolution d'un système de Cramer

Définition
Le système (S) est dit de Cramer si $m = n$ et si $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible.
C'est dire que dans le système (S) le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues ; aussi A est ici la matrice du système (S).

3.2.1 Résolution d'un système de Cramer par l'inversion de la matrice associée au système

Théorème
Tout système de Cramer (S) admet une solution unique $X = A^{-1}B$.
Exemple

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases}$$

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

et $\det(A) = 3 \neq 0$; c'est donc un système de Cramer.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

on a alors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{3} \\ -2 \end{bmatrix}.$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}.$

3.2.2 Résolution d'un système de Cramer par des déterminants

Soit $(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} a_{11}\,x_1 & +\,a_{12}\,x_2 & +\ldots+a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & +\,a_{22}\,x_2 & +\ldots+a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 & +\,a_{n2}\,x_2 & +\ldots+a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array} \right.$,
un système de n équations à n inconnues de Cramer.
On appelle déterminant du système (Σ) le nombre $\Delta = \det A$, où A est la matrice associée a (Σ).
On appelle déterminant de x_i le nombre Δ_{x_i} égal au déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i^{ème}$ colonne par les éléments respectifs des seconds membres c'est-à-dire $b_1\ , b_2\ , \ldots, b_n$.

Théorème

(Σ) étant de Cramer, $S_{\mathbb{K}^n} = \left\{ \left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \ldots.; \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \right) \right\}$ c'est-à-dire que (Σ) admet une solution unique.

Exercice

$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y+z & = & 3 \\ 2x-y+z & = & 1 \\ -x-y+z & = & 0 \end{array} \right.$.

Réponse

La matrice associée à (Σ) est $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \text{ (je rappelle que j'ai fait } \mathrm{col}_3 + \mathrm{col}_2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7\,;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6\,;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{3}\,;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{3}\,;\ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2$$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; -2 \right) \right\}$.

Définition(rappel)

On appelle opérations élémentaires dans un système ;
les opérations de l'une des formes suivantes :
a) Echanger deux lignes du système.
b) Multiplier une ligne par une constante non nulle.
c) Rajouter à une ligne du système un multiple d'une autre ligne du système. (une ligne ici est une équation du système)

Remarque

Les opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent. On peut donc transformer un système linéaire par une succession d'opérations élémentaires en un système échelonné.

3.3 Systèmes échelonnés ou Méthode du pivot

On dit qu'un système est échelonné si et seulement si tous les coefficients figurant en-dessous de la diagonale sont nuls.
Cela revient à dire que $\forall i > j,\ a_{ij} = 0$.
Autant dire qu'un système échelonné se présente sous l'une des trois formes suivantes :
(a) Si $m = n$
(un tel système est dit carré et l'on dit d'un système carré échelonné qu'il est trigonal).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dans ce premier cas il est facile de résoudre le système lorsque tous les termes diagonaux sont non nuls. on utilise l'*algorithme de la remontée* :
la dernière équation donne en effet la valeur $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$,
puis l'avant-dernière ligne donne la valeur
$x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n}\ x_n\right)$ et, plus généralement,
on obtient : $x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\ x_j\right)$,
ce qui permet de calculer les x_k successifs par ordre décroissant de l'indice k. Le système admet une unique solution, et cela quel que puisse être le second membre.
Un système ayant cette propriété s'appelle un *système de Cramer*.
Si, au cours de cet algorithme, on trouve un coefficient diagonal nul dans une ligne, par exemple la ligne k, alors on ne peut pas trouver la valeur de x_k .
La ligne correspondante introduit une *condition de compatibilité.*
Si cette condition n'est pas vérifiée, le système n'admet pas de solutions ; si au contraire cette condition est vérifiée, toute solution de x_k convient et l'on peut poursuivre l'algorithme. Il y a alors une infinité de solutions, paramétrées par la valeur de x_k .
Cette situation peut d'ailleurs se rencontrer plusieurs fois au cours de la remontée, induisant une discussion plus approfondie.
On voit par là l'intérêt des systèmes triangulaires dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

(b) Si $m < n$: on a :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{mm}x_m & = b_m \end{cases}.$$

Dans ce cas, on fixe arbitrairement les valeurs des variables x_{m+1} à x_n .
On est alors ramené au cas précédent, simple à résoudre lorsque tous
les coefficients diagonaux sont non nuls, nécessitant une discussion sinon.

(c) Si $m > n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{nn}x_n & = b_n \\ & & 0 & = b_{n+1} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & = b_m \end{cases}.$$

Dans ce cas les dernières lignes donnent directement des conditions de compatibilité.
Lorsqu'elles sont vérifiées, on se ramène au cas ci-dessus. D'où, là encore,
l'intérêt de l'obtention de coefficients diagonaux non nuls.

Exemple

Soit $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) \\ 3x + 4y - 2z = 0 & (E_2) \\ 3x - 2y + 4z = -1 & (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) \\ 6y - 6z = 1 & (E_2 - E_3) \\ y - 11z = 5 & (3E_1 - 2E_3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 & (E_1) & \Rightarrow x = \frac{1}{10} \\ 6y - 6z = 1 & (E_2\ ) & \Rightarrow y = -\frac{19}{60} \\ -60z = 29 & (6E_3 - E_2) & \Rightarrow z = -\frac{29}{60} \end{cases}.$

Donc $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{1}{10}; -\frac{19}{60}; -\frac{29}{60} \right) \right\}$.

3.4 Calcul de l'inverse d'une matrice par la résolution de systèmes

Exercice :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Réponse

$\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible ; soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$,

puisque que si A est inversible on a : $(S) \Leftrightarrow AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \Leftrightarrow (S')$.

$(S) \Leftrightarrow AX = Y \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = y_1 \\ x_1 - x_2 & = y_2 \\ x_1 - x_3 & = y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$$

La matrice associée à (S') est l'inverse de A donc :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Exercice

Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse par trois méthodes différentes.

Proposition de correction

Inversion de A si possible à l'aide de trois méthodes :

$1^{ère}$ Méthode d'inversion par la comatrice de A

Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible et}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times com\,({}^tA) = \frac{1}{\det A} \times ({}^t comA)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow com\,({}^tA) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times com\,({}^tA) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

$2^{ième}$ Méthode par les opérations élémentaires sur $\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right]$:

J'ai choisi de faire les opérations élémentaires sur les lignes de $\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right]$.

Mais on aurait pu faire les opérations élémentaires sur les colonnes de $\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I_3 \end{array}\right]$ je vous y invite.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -L_1 \\ L_2 + 2L_1 \\ \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 + \frac{2}{5}L_2 \\ \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -L_3 \end{array} \quad \Rightarrow A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

$3^{ième}$ Méthode l'établissement de $(S) \Leftrightarrow AX = Y$ en $(S) \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$:

Soit le système : $AX = Y \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Y$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + 2y = x' \\ 2x + y = y' \\ 5y - z = z' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{1}{5}x' + \frac{2}{5}y' \\ y = \frac{2}{5}x' + \frac{1}{5}y' \\ z = 2x' + y' - z' \end{array} \right. \Leftrightarrow (S')$$

La matrice associé à (S') est $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c'est l'inverse de A

c'est-à-dire A^{-1}. Car avec A inversible ; on a :
$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$.

Chapitre 4

ESPACES VECTORIELS

4.1 Introduction

Dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan, on a :
(i) $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ on dit que "+" est une loi de composition interne sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ avec les propriétés suivantes :
(1) $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
On dit que la loi "+" est associative dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
(2) Le vecteur $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ vérifie : $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
On dit que la loi "+" admet un élément neutre dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ qui est ici $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ dit vecteur nul de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
(3) $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, on a : $(-\overrightarrow{u}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
On dit que tout élément $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ admet un symétrique unique qui est $(-\overrightarrow{u}) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
(4) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

On dit que la loi "+" est commutative dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

Dès lors, on dit que $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +\right)$ est un groupe commutatif ou abélien

(ii) $\forall \alpha \in (\mathbb{R}, +, \times), \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \alpha.\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ on dit que "." est une loi de composition externe sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ au moyen du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ avec les propriétés suivantes :
(5) $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.(1 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, \times)$)
(6) $\alpha (\beta \overrightarrow{u}) = (\alpha \times \beta) \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(7) $\alpha (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha \overrightarrow{u} + \alpha \overrightarrow{v}, \; \forall \alpha \in \mathbb{K}, \; \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
(8) $(\alpha + \beta) \overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
On a ainsi une structure d'espace vectoriel sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et on dit que $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +, .\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Dans la suite on va généraliser la situation ci-dessus dans le sens :
1. Remplacer $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ par un ensemble non vide E, qui muni de "+" loi de composition interne sur E et "." loi de composition externe sur E au moyen d'un corps $(\mathbb{K}, +, \times$(notée aussi ".")) quelconque. Ici $\mathbb{K}$ =($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Tel que conformément aux éléments de E on a les propriétés (1) à (8).
et ainsi avoir encore une structure d'espace vectoriel sur E et dire alors $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. On pourrait aussi changer les symboles des lois qui sont en jeu dans 1. avec les propriétés (1) à (8) assurées, et ainsi avoir encore une structure d'espace vectoriel sur E (non présenté dans le cours-ci).

4.2 Définition d'un espace vectoriel

Définition

Un groupe commutatif $(E, +)$ est un ensemble $E \neq \varnothing$ muni d'une loi de composition interne $(x + y) \in E$, définie pour tous éléments x et y de E, ayant les propriétés suivantes :

(1) Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in E$

(2) Il existe un élément neutre $0 \in E$ qui vérifie : $\forall x \in E$, $x + 0 = 0 + x = x$.

(3) Tout élément x de E possède un symétrique, noté $-x \in E$ tel que
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(4) Commutativité : $x + y = y + x$, $\forall x, y \in E$.

Définition 1 : Soit $(E, +)$ un groupe commutatif et $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif. Nous dirons que $(E, +)$ est **un espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (qu'on pourrait écrire $\vec{0}$ ou 0_E ou simplement 0 s'il n'y pas de confusion possible) s'il existe une loi de composition **externe** "." associant à tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout élément $x \in E$, un élément de E, noté $\alpha.x = \alpha x$,avec les propriétes suivantes :

(5) $1x = x$, tout élément $x \in E$.(1 est l'élément neutre $(\mathbb{K}, \times)$)

(6) $\alpha (\beta x) = (\alpha \times \beta) x$, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(7) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$.

(8) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tout élément $x \in E$.

Aussi on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définitions

1.Un élément x de $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel(qu'on pourrait écrire $\vec{x}$) est dit **vecteur** et ceux de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

2.Deux vecteurs x et y de E sont dit **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$y = \lambda x.$$

Remarque

Nous laissons au lecteur le soin de distinguer l'élément neutre de $(E, +)$. (qu'on pourrait écrire $\vec{0}$ ou 0_E), qui est un vecteur, appelé **vecteur nul** de E, de l'élément nul 0 de $\mathbb{K}$ (qu'on pourrait écrire $0_{\mathbb{K}}$), qui est un scalaire.

Ces éléments vérifient les règles de calcul suivantes :

Tout élément $x \in E$ $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$, d'après (8) si $\beta = -\alpha$.

Tout élément $x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha.x = 0_E \Longleftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

On a en outre : $\alpha (-x) = (-\alpha) x = -\alpha x$, tout élément $x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Et, en particulier $(-1) x = -(1.x) = -x$.

4.2.1 Exemples

a) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des lois définies par les formules ci-dessous :

$\forall (u_1, u_2, ..., u_n), (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{K}^n$,

$(u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$.

$\forall (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{K}^n, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$,
$\alpha (u_1, u_2, ..., u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n)$.
Ces lois font de $\mathbb{K}^n$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
b) L'ensemble $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à une variable x et à coefficients dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur le corps des nombre complexes, l'addition étant celle des polynômes et la multiplication par un nombre complexe c le produit de c par un polynôme .
Ce même ensemble est aussi un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels avec une loi externe de multiplication par un nombre réel.On dit que $\mathbb{C}[x]$ est un espace vectoriel complexe si son corps de base est $\mathbb{C}$ Si le corps de base est $\mathbb{R}$, on dit qu'on a un espace vectoriel réel.

c) L'ensemble $M_{pq}(\mathbb{K})$ des matrices de type (p, q) muni de l'addition est un groupe commutatif en association avec la loi de composition externe
(qui est la multiplicationon par un scalaire complexe ou réel, d'une matrice)
fait de $M_{pq}(\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.
Définition
Soit une suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n vecteurs d'un $(\mathbb{K}, +, \times)$-espace vectoriel $(E, +, .)$; une **combinaison linéaire** de cette suite est un élément de E de la forme :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$ ce sont les coéfficients de la combinaison linéaire ; aussi dit-on que y est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$.
Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$, $x = -2(1, 4) + 7(-4, 5) - 3(6, 9)$ est une combinaison de la suite de vecteurs$((1, 4); (-4, 5), (6, 9))$.

4.3 Suite liée de vecteurs. Suite libre de vecteurs

Définition 3. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,on dit que la suite de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est **liée** si l'on peut trouver des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, **non tous nuls**, tels que :

$$(9) : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

On dit également, par abus de langague, que les vecteurs de la suite sont **liés**, ou encore **linéairement dépendants**.
Si la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre**, ou encore que $x_1, x_2, ..., x_n$ sont libres ou **linéairement indépendants ;**
ceci signifie que l'égalité (9) entraîne $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.
Si la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre , il en est de même de toute suite partielle et, en particulier, tous les éléments x_i de la suite sont distincts.
Exemples
1.Soit $x(1, 4) + y(-4, 5) + z(6, 9) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 6z = 0 \\ 4x + 5y + 9z = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = -\frac{22}{7}z; y = \frac{5}{7}z$$

avec z réel quelconque, ainsi $((1, 4); (-4, 5), (6, 9))$ est une suite liée.

2. Soit $x\,(1,4)+y\,(-4,5)=(0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} x-4y & =0\\ 4x+5y & =0\end{array}\right.\Rightarrow x=y=0.$

Ainsi $((1,4)\,;(-4,5))$ est une suite libre.

EXERCICE 1

Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :

1. $u=(1,2,-1);\ v=(1,0,1);\ w=(-1,2,-3)$
2. $u=(-1,2,5);\ v=(2,3,4);\ w=(7,0,-7)$.

Proposition de correction

1. Soit $A=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix} & \begin{array}{c}u\\ v\\ w\end{array}\end{array}\approx\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 4 & -4\end{bmatrix} & \begin{array}{c}u\\ v-u\\ w+u\end{array}\end{array}$

$$A\approx\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}u\\ v-u\\ w+u+2\,(v-u)\Rightarrow w+u+2\,(v-u)=\vec{0}\end{array}\end{array}$$

$w+u+2\,(v-u)=\vec{0}\Leftrightarrow w+u+2\,(v-u)=2v-u+w=\vec{0}$; donc la famille $\{u,v,w\}$ est une famille liée et la relation de dépendance liant les vecteurs : u,v,w est : $2v-u+w=\vec{0}$.

2. $u=(-1,2,5);\ v=(2,3,4);\ w=(7,0,-7)$.

Soit $B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 7 & 0 & -7\end{bmatrix} & \begin{array}{c}u\\ v\\ w\end{array}\end{array}\approx\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 0 & 7 & 14\\ 0 & 14 & 28\end{bmatrix} & \begin{array}{c}u\\ v+2u\\ w+7u\end{array}\end{array}$

$$B\approx\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 0 & 7 & 14\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}u\\ v+2u\\ w+7u-2\,(v+2u)\Rightarrow w+7u-2\,(v+2u)=\vec{0}\end{array}\end{array}$$

$w+7u-2\,(v+2u)=\vec{0}\Leftrightarrow w+7u-2\,(v+2u)=3u-2v+w=\vec{0}$; donc la famille $\{u,v,w\}$ est une famille liée et la relation de dépendance liant les vecteurs : u,v,w est :

$3u-2v+w=\vec{0}\Leftrightarrow u=\dfrac{1}{3}\,(2v-w)\Leftrightarrow v=\dfrac{1}{2}\,(3u+w)\Leftrightarrow w=2v-3u.$

Propriété 1

Pour qu'une suite de vecteurs $x_1,x_2,.....,x_n$ soit liée, il faut et il suffit que l'un d'eux soit une combinaison linéaire des autres.

Théorème 1

Soit $(x_1,x_2,.....,x_n)$ une suite de n vecteurs d'un espace vectoriel E.
Soit $(y_1,y_2,.....,y_{n+1})$ une suite de $(n+1)$ combinaisons linéaires des vecteurs $x_1,x_2,.....,x_n$. Alors la $(y_1,y_2,.....,y_{n+1})$ est liée.

4.4 Espaces vectoriels de dimension finie

4.4.1 Espace vectoriel ayant un nombre fini de générateurs

Définition 4.On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E possède n **générateurs** $x_1,x_2,.....,x_n$, si $x_1,x_2,.....,x_n$ sont des vecteurs de E et si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $(x_1,x_2,.....,x_n)$. Il en résulte que E coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1,x_2,.....,x_n)$ et est donc l'espace engendré par cette suite.

Exemple

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$
donc $\mathbb{R}^3 = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \,; x, y, z \in \mathbb{R}\}$
ainsi la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Le **théorème 1** entraîne immédiatement :
Propriété 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ayant n générateurs. Alors toute suite de $(n+1)$ vecteurs de E est liée.

4.4.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une **base** de E, si l'on a les deux propriétés suivantes :
1°) $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des générateurs de E.
2°) La suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.
Propriété 3
*Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour que la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ soit une base de E, il faut et il suffit que tout vecteur $y \in E$ s'exprime de façon **unique** sous la forme :*

$$y = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \qquad \alpha_i \in \mathbb{K}; \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

α_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du vecteur y par rapport à la base $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
et alors la matrice colonne $Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *est la matrice colonne des coordonnées du vecteur y dans la base $(x_1, x_2, ..., x_n)$.*
Le théorème suivant exprime l'invariance du nombre d'éléments d'une base.
Théorème 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ayant une base $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Toute autre base de E est formée de n éléments. Toute suite libre $(y_1, y_2, ..., y_n)$ est une base de E. Aussi toute suite génératrice $(z_1, z_2, ..., z_n)$ est une base de E.
Définition 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$.
On dit que E est de **dimension finie** s'il existe un entier naturel n et une base de E composée de n éléments.Alors, d'après le théorème 2, toute base de E est formée de n éléments ; cet entier naturel n s'appelle la **dimension** de E et se note

$$\mathbf{dim} E \text{ ou } (\dim_{\mathbb{K}} E).$$

Remarques
a) Si $E = \{0_E\}$, il n'y a pas de base ; on dit encore que E est de dimension nulle et on pose $\dim E = 0$.
b) Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, admet une **infinité** de bases.
Exemple : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $((\lambda, 0) ; (0, \lambda))$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
c) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, toute famille de vecteurs de E, de cardinal strictement inférieur à n, ne peut être génératrice, avec possibilité d'indépendance linéaire.
d) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, toute famille de vecteurs de E, de cardinal strictement supérieur à n, ne peut être libre, avec possibilité d'être génératrice.
e) Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, seule une famille de vecteurs de E, de cardinal égal à n, peut être une base de E. C'est dire qu'une famille de

vecteurs libres de E a pour cardinal maximal n et une famille de vecteurs générateurs de E a pour cardinal minimal n.

Exemples

a°) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ a une base dite **base canonique** $(e_1, e_2, ..., e_n)$ où le vecteur e_k est le vecteur $(0, 0, .., 0, 1, 0, ..., 0)$, le 1 étant la $k^{ième}$ coordonnée, toutes les autres coordonnées sont nulles.
b°) Soit $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à une variable complexes de degré inférieur ou égal à n, avec le polynôme nul. La suite de polynômes $(1, x, x^2, ..., x^n)$ forme une base de E.
Donc $\dim E = n + 1$.
Plus généralement $\forall a \in \mathbb{C}$, on vérifie que $\left(1, x - a, (x-a)^2, ..., (x-a)^n\right)$ est aussi une base de E.
Ainsi il y a bien une infinité de bases de $\mathbb{C}_n[X]$.
c°) Il ne faut pas croire que tout espace vectoriel soit de dimension finie.
Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ de tous les polynômes complexes n'est pas de dimension finie ; s'il était de dimension n, $n+1$ polynômes quelconques seraient liés ; or la suite $(1, x, x^2, ..., x^n)$ est une suite libre de $n+1$ vecteurs.
Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de **dimension infinie**.

Proposition
L'ensemble $(M_{pq}(\mathbb{K}), +, .)$ *des matrices* $p \times q$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$,
une de ses bases est constituée par les matrices E_{ij} tels que $a_{ij} = 1$ et $a_{rs} = 0$, si $r \neq i$ ou $s \neq j$. Ceux sont les matrices élémentaires de $M_{pq}(\mathbb{K})$.
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{pq}(\mathbb{K})$, alors $A = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} a_{ij} E_{ij}$ ce qui entrainera que la dimension de $M_{pq}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$ est pq.

Exemples
a°) Une base de l'espace vectoriel $M_{23}(\mathbb{R})$ est constitué par les matrices :

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc la dimension de $M_{23}(\mathbb{R})$ est 6.
Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_{23}(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$A = 2E_{11} + 5E_{12} - 7E_{13} + 9E_{21} + 8E_{22} + 4E_{23}.$$

b°) Une matrice $1 \times q$ a la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \end{pmatrix}$.
on l'appelle **matrice ligne ou uniligne** appartenant à l'espace $M_{1q}(\mathbb{K})$ qui est isomorphe à $\mathbb{K}^q$, donc de dimension q.

c°) Une matrice $p \times 1$ a la forme $B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$.

On l'appelle **matrice colonne ou unicolonne** appartenant à l'espace $M_{p1}(\mathbb{K})$ qui est isomorphe à $\mathbb{K}^p$, donc de dimension p.

d°) Une matrice $n \times n$ est dite **matrice carrée d'ordre** n appartenant à l'espace vectoriel des matrices notée $M_n(\mathbb{K})$.Il est de dimension n^2 sur $\mathbb{K}$.

4.4.3 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition
Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ une suite de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit une base β, de E, le déterminant de la suite S dans la base β, est noté
$\det_\beta(S) = \begin{vmatrix} V_1^\beta & V_2^\beta & \cdots & V_n^\beta \end{vmatrix}$, où V_j^β constituent la $j^{ième}$ colonne avec les coordonnées de V_j dans la base β. $\forall 1 \leq j \leq n$.
Exemple
Soient $V_1 = (1, -6, 8)$, $V_2 = (0, -3, 11)$, $V_3 = (0, 0, -5)$ trois vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et $S = (V_1, V_2, V_3)$.
Comme cardinal de (S) noté $Card(S) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ alors on peut évaluer le déterminant de S :

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 15. \text{ Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{bmatrix},$$

on a $\det(S) = \det A = \det({}^tA)$.
On peut donc saisir les coordonnées des V_j en **colonne** ou en **ligne**.
Proposition
Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ une suite de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit une base β, de E,
a) Si $\det_\beta(S) \neq 0$, alors la suite S est libre ou linéairement indépendante et comme $Card(S) = \dim E$, donc S est **une base** de E.
b) Si $\det_\beta(S) = 0$, alors la suite S est liée ou linéairement dépendante.

4.5 Sous-espaces vectoriels

Définition 2 : Une partie non vide F d'un $(\mathbb{K}, +, \times)$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
1°) $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$
2°) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \ \alpha.x \in F$.
(i.e. la loi de composition externe sur E est stable dans F.)
Les opérations définies dans E sont donc également définies dans F et lui confère une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Aussi un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-ensemble F de E **caractérisé** par les deux propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F \quad : x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \ \alpha.x \in F. \end{array} \right\} \Longleftrightarrow 0_E \in F \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \ \alpha x + \beta y \in F.$$

De même :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F \quad : x + y \in F \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \ \alpha.x \in F. \end{array} \right\} \Longleftrightarrow 0_E \in F \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \ \alpha x + y \in F.$$

Remarque

Tout sous-ensemble non vide F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui est tel que toute combinaison linéaire de ses éléments lui appartiennent est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition

Tout sous ensemble non vide d'un espace vectoriel E engendré par une famille de vecteurs de E, est un sous-espace vectoriel de E, aussi tout sous-espace vectoriel de E, est un sous ensemble de E engendré par une famille de vecteurs de E.

4.5.1 Exemples de sous-espaces vectoriels

a) L'ensemble F des combinaisons linéaires de la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Nous appellerons ce sous-espace vectoriel F le **sous-espace engendré** par la suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble réduit au singleton vecteur nul :$\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E , ainsi que E lui-même.

Le sous-espace vectoriel nul $\{0_E\}$ et E sont dit **sous-espaces vectoriels triviaux** de E.

Tout autre sous-espace vectoriel F de E est dit **sous-espace vectoriel propre** de E, et vérifie : $\{0_E\} \subset F \subset E$.

c) L'ensemble $\mathbb{C}_n[x]$ des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$, forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x]$.

4.6 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

La propriété suivante nous sera utile dans cette étude.

Propriété 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \geq 0$ un entier naturel. Supposons que toutes les suites de $(n+1)$ vecteurs de E soient liées. Alors E est un espace vectoriel de dimension finie et $dimE \leq n$.

Corollaire 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $dimF \leq dimE$. De plus, si $dim\ F = dim\ E$, alors $F = E$.

Une autre conséquence de la propriété 4 est la suivante :

Corollaire 2

Soit E un espace vectoriel ayant n générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$, alors E est un espace vectoriel de dimension finie et $dim\ E \leq n$.

4.6.1 Rang d'une suite finie de vecteurs

Considérons une suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, de dimension finie ou non. Le sous-espace F engendré par cette suite admet n générateurs $x_1, x_2, ..., x_n$; c'est donc, d'après le corollaire 2, un espace vectoriel de dimension finie $r \leq n$.

Définition 6.

1. On appelle **rang** r d'une suite(famille) finie de n **vecteurs** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la **dimension** r de l'espace vectoriel F **engendré** par ces vecteurs. Ou l'on dira que F est de codimension $(n-r)$. On note $r \leq n$.
2. Aussi le **rang** r d'une suite(famille) finie de n **vecteurs** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est le nombre maximum de vecteurs de la suite(famille) finie de n veteurs, qui soient libres dans la suite en question.

Remarques

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, de dimension n, considérons une famille S de vecteurs de E. Le rang de S est le rang de la A matrice constituée en lignes ou en colonnes des coordonnées des vecteurs de S.
A est dite une matrice associée à la suite S. Ainsi $rang\,(S) = rang\,(A)$.

1. S est génératrice de E ssi le rang de $S = n = rang\,(A)$
2. S est libre ssi le rang de S =Cardinal de S(Card$S$)=rang(A)
3. S est liée ssi le rang de S est **stritement inférieur** au Cardinal de S(Card$S$)
4. S est une base de E ssi le rang de $S = n$ =Cardinal de S(Card$S$)=rang(A)
5. Soit $F =< S >$, alors $\dim F = rang\,(S) = rang\,(A)$

Proposition

1)Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2) $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme quoi l'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
3) Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.

Remarque

La réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n'est pas necessairement un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Soit un sous-ensemble non vide A inclus dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $vect\,(A) =< A >$ est appelé le sous-espace vectoriel engendré par A et c'est le **plus petit** sous-espace vectoriel de E contenant A.
Aussi $vect\,(A) =< A >$ est l'intersection des tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

Remarque

Si $v_1, v_2, v_3 \in E$,
$vect\,(v_1, v_2, v_3) = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3\,;\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}\} =< v_1, v_2, v_3 >$
c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3.

Proposition

Soient A et B des parties d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ;
1.$vect\,(vect\,(A)) = vect\,(A)$
2. Si $A \subset B \Rightarrow vect\,(A) \subset vect\,(B)$
3. $vect\,(A \cup B) = vect\,(A) + vect\,(B)$.
4. si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $vect\,(A) = A$.

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, on a :
1) $F + G =< F \cup G >$=l'espace engendré par $F \cup G$.
2) $\dim\,(< F \cup G >) = \dim\,(F + G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G)$.

Remarque

Si $\dim E = n$, n générateurs de E forment une base de E.

EXERCICE 1

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa base canonique (t_1, t_2, t_3, t_4). On considère les vecteurs :
$e_1 = (1,2,3,4)$; $e_2 = (1,1,1,3)$; $e_3 = (2,1,1,1)$; $e_4 = (-1,0,-1,2)$; $e_5 = (2,3,0,1)$.
Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F par e_4 et e_5.
Calculer les dimensions respectives de E, F, $E \cap F$ et $E + F$.

Proposition de correction de l'exo.1

Soit $S_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$; $S_2 = \{e_4, e_5\}$
$E =< e_1, e_2, e_3 >= vect\,(S_1)$ et $F =< e_4, e_5 >= vect\,(S_2)$

Soit $M_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$;

M_E est une matrice associée à la suite ou à la famille S_1.

Le rang de M_E est la dimension de E, vu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

le rang de M_E est 3, donc $\dim E = 3$.

Soit $M_F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

M_F est une matrice associée à la suite ou à la famille S_2.

Le rang de M_F est la dimension de F, vu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

le rang de M_F est 2, donc $\dim F = 2$.

Soit $S_3 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$E + F =< e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 >= vect\,(S_3)$

Soit $M_{E+F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

M_{E+F} est une matrice associée à la suite ou à la famille S_3.

Le rang de M_{E+F} est la dimension de $E + F$, vu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

le rang de M_{E+F} est 4, donc $\dim(E+F) = 4$.
Pour finir on sait que : $E + F = vect\,(E \cup F) =< E \cup F >$
$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) \Leftrightarrow$
$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E+F) = 3 + 2 - 4 = 1$.

EXERCICE 2

Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

1. $u = (7,12)$; $v = (18,-13)$; $w = (-4,17)$
2. $u = (-1,0,2)$; $v = (1,3,1)$; $w = (0,1,-1)$
3. $u = (15,-27,-6,12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

Proposition de correction de l'exo.2
1. $u = (7, 12)$; $v = (18, -13)$; $w = (-4, 17)$
La famille $\mathcal{F} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ et le $Card\mathcal{F}$ =3 $> \dim \mathbb{R}^2 = 2$
donc la famille $\mathcal{F}$ est liée dans $\mathbb{R}^2$.
2. $u = (-1, 0, 2)$; $v = (1, 3, 1)$; $w = (0, 1, -1)$

$$\text{Soit } A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \end{array} \approx \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u \\ v+u \\ w \end{matrix} \end{array}$$

$$A \approx \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u \\ v+u \\ -3w+(v+u) \end{matrix} \end{array} \quad \text{délà on a bien :}$$

$$A \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{le rang de } A : rg\,(A) = 3$$

aussi la famille $\mathcal{G} = \{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ et le sous-espace vectoriel engendré
par $\mathcal{G} = \{u, v, w\}$ c'est-à-dire $< u, v, w >$ est de
dimension $rg\,(A) = 3 = Card\mathcal{G}$ donc la famille $\mathcal{G}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
Remarque
En formant une matrice A constituée en ligne ou en colonne des coordonnées des vecteurs d'une famille donnée $\mathcal{F}$; lorsque le rang de A est égal au cardinal de $\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{F}$ est libre sinon elle est liée.
3. $u = (15, -27, -6, 12)$; $v = (-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.
La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$
aussi soit

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \end{array}$$

$$\approx \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 15 & -27 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u \\ 6v+u \end{matrix} \end{array} \Rightarrow 6v + u = \vec{0}$$

La famille $\mathcal{H} = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$ est donc liée car il y a une relation
de dépendance entre les vecteurs : u, v qui est : $6v + u = \vec{0}$.

4.7 Sous-espaces supplémentaires

Définition 8
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont appelés **supplémentaires** si tout élément $x \in E$ s'écrit d'**une façon** et d'**une seule** sous la forme : $x = y + z,\ y \in F,\ z \in G$.
On dit encore que E est la **somme directe** de F et G et on écrit :
$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
Théorème 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives β et γ. Les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :
(a) *F et G sont supplémentaires*
(b) *$F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.*
(c) *$rang\,(\beta \cup \gamma) = \dim F + \dim G = \dim E$, alors $\beta \cup \gamma$ est une base de E.*

Théorème 4(De la base incomplète).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
1. *Pour toute suite libre $(y_1, y_2, ..., y_p)$ de E $(p \leq n)$, on peut trouver $q = n - p$ vecteurs $z_1, z_2, ..., z_q$ de E tels que $(y_1, y_2, ..., y_p, z_1, z_2, ..., z_q)$ soit une base de E.*
2. *Tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G.*

4.8 Somme de n sous-espaces vectoriels

Définition
On appelle somme de F_1, F_2,...,F_n, n sous-espaces vectoriels de E
et on note $\sum_{i=1}^{n} F_i$ l'ensemble $\{x_1 + x_2 + ... + x_n\,;\, x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$.
C'est dire que $\sum_{i=1}^{n} F_i = \{x_1 + x_2 + ... + x_n\,;\, x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$.
Proposition
La somme de F_1, F_2,...,F_n, n sous-espaces vectoriels de E,
$\sum_{i=1}^{n} F_i = \{x_1 + x_2 + ... + x_n\,;\, x_i \in F_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Proposition
Si les F_i sont de dimension finie, alors
$\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$.
Définition
On dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe si
$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_n\,;\, x_1 + x_2 + ... + x_n = 0_E \Rightarrow$
$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0_E$.
Dans ce cas, on note $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$
Aussi tout élément de $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des F_i.
Proposition
Si les F_i sont de dimension finie, alors
$\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$.
Aussi $(\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.
$\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ veut dire que l'on a une somme directe des F_i.

4.9 Produit de deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$

Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels . On peut munir l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant :

l'addition comme le produit de deux groupes additifs :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et la multiplication de (x_1, x_2) par $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\alpha\,(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Définition 9. L'espace vectoriel E ainsi construit s'appelle le **produit** des espaces vectoriels E_1 et E_2 et se note : $E = E_1 \times E_2$. Le vecteur nul de E est $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2})$ où 0_{E_1} est le vecteur nul de E_1 et 0_{E_2} le vecteur nul de E_2. Les deux sous-espaces vectoriels de E : $F_1 = \{(x_1, 0)\,,\ x_1 \in E_1\}\,; F_2 = \{(0, x_2)\,,\ x_2 \in E_2\}$ vérifient :

Propriété 5. *F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E, et on a donc : $E = F_1 \oplus F_2$.*

Propriété 6. *Si E_1 et E_2 sont de dimension finie, alors E est de dimension finie et on a :* $\dim E = \dim (E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

Dans la définition d'un produit, on peut avoir $E_1 = E_2$; on définit ainsi $E_1 \times E_1$ que l'on note aussi E_1^2.

La définition du produit de deux espaces vectoriels se généralise au produit $E_1 \times E_2 \times ..... \times E_n$ d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1, E_2, ..., E_n$ et, en particulier on peut avoir $\underbrace{E_1 \times E_1 \times ..... \times E_1}_{n \text{ fois}} = E_1^n$.

Chapitre 5

APPLICATIONS LINÉAIRES

Définition(d'une application linéaire)
Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{K}$(=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)-espaces vectoriels et
$f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application linéaire** si elle possède les deux propriétés suivantes :
(1) $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$
(2) $\forall x \in E,\qquad \forall \alpha \in \mathbb{K},\qquad f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Propriétés

a°) On déduit de (1) en posant $y = x = 0_E \in E,\ f(0_E) = 0_F \in F.$
On a également $f(-x) = -f(x).$

b°) (1) et (2) $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
(1) et (2) $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$

c°) Soit E munit d'une base $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$,

pour tout $y \in E,\ \exists! \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$; $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$; où $Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

est la matrice colonne des coordonnées de $y \in E$ dans de la base $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$, d'où $f(y) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$; donc étant donnée $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $f(\beta) = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ qui est l'action de f sur une base de E, on peut déterminer $f(y)$, $\forall y \in E$, dès qu'on connait

$Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ qui est la matrice colonne des coordonnées de $y \in E$ dans

de la base $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$. On peut dire que f est complètement déterminée par son action sur une base de E.

Remarques

1) *Une application linéaire f est une application d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, telle que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs de E est égale à une combinaison linéaire de l'image des vecteurs de E, avec les mêmes coefficients de combinaison par rapport à un vecteur x de E et son image $f(x)$.*

2) *Une application f entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F est linéaire ssi les expressions images de $f(x)$, pour $x \in E$, sont combinaison linéaire des*

coordonnées de $x \in E$, moyennant une base de E.
Exemple
Cette expression : $a_1x_1 + ... + a_nx_n$ est linéaire en $x_1, x_2, ..., x_n$, car combinaison linéaire des x_1 ; ... ; x_n ; mais pas celle-ci : $a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$.
Exemples
a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (4, x - 9y)$ n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, car $g(0, 0) = (4, 0) \neq (0, 0)$ vecteur nul de $\mathbb{R}^2$.

5.1 Image et Noyau

Définition(du noyau d'une application linéaire)
Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$. Il est noté $Ker\ f$. D'où $Ker\ f = \{x \in E;\ f(x) = 0_F\}$.
Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
$\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ f(x, y) = (0, 0)\}$

$$f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y$$

$\ker f = \{(x, -2x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\} =< (1, -2) >\Rightarrow \dim \ker f = 1$.
Lemme 1. *Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*
Proposition 1. *Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si $Ker\ f = \{0_E\}$.*
Définition(de l'image d'une application linéaire)
L'**image** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble image de E par l'application f, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs appartenant à F tels qu'il existe au moins un vecteur $x \in E$ avec $f(x) = y$. On la note $f(E)$ ou encore $\operatorname{Im} f$.
$f(E) = \operatorname{Im} f = \{y \in F, \exists x \in E ;\ f(x) = y\} = \{\ f(x)\ ;\ x \in E\}$.
Exemples
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (2x + y, 0)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}^2) = \{f(x, y)\ ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(2x + y, 0)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{x(2, 0) + y(1, 0)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}^2\} =< (2; 0) ; (1, 0) >=< (1, 0) >$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $(x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
$\operatorname{Im} g = g(\mathbb{R}^2) = \{g(x, y)\ ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x - y, x + y, x + 2y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}^2\}$
$\operatorname{Im} g = \{x(1, 1, 1) + y(-1, 1, 2)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}^2\} =< (1, 1, 1) ; (-1, 1, 2) >$.
Lemme 2 *L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.*
Remarques
1)L'image par une application linéaire $f : E \to F$ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
2) Aussi l'image reciproque de f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.
Proposition 2
Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
Définition(d'un isomorphisme)
1) Une application linéaire $f : E \to F$ est un **isomorphisme** si elle est injective et surjective. On dit alors que E et F sont **isomorphes** par f.

2) Une application linéaire $f : E \to E$ est un **endomorphisme**. Un endomorphisme qui est bijectif est un **automorphisme.**
3) Deux espaces E et F sont **isomorphes** noté($E \simeq F$),
s'il existe au moins un isomorphisme f de E sur F.
4) Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, il existe une application inverse f^{-1} ; et f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.
5) $f : E \to F$ est un isomorphisme $\Longleftrightarrow Ker\ f = \{0_E\}$ et $f(E) = F$.

Théorème 1
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et une application linéaire $f : E \to F$. Alors :

$$(a)\ f \text{ est un isomorphisme entre } E \text{ et } F.$$
$$\Updownarrow$$
$$(b)\ dimE = dimF \text{ et } Kerf = \{0_E\}.$$
$$\Updownarrow$$
$$(c)\ dimE = dimF \text{ et } \operatorname{Im} f = F$$

Lemme 3 *Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite libre de vecteurs de E et une application linéaire $f : E \to F$ injective. Alors $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n))$ est une suite libre dans F.*

5.1.1 Le théorème noyau-image

Théorème 2
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et une application linéaire $f : E \to F$. Si la dimension de E est finie, il en est de même des dimensions de $Kerf$ et de $f(E) = \operatorname{Im} f$ et l'on a : $\dim E = \dim f(E) + \dim Ker\ f$.

Lemme 4
Soient E de dimension finie et une application linéaire $f : E \to F$. Alors $f(E)$=$\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.

Corollaire. *Avec les hypothèses du théorème 2 :*
$$Ker\ f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim f(E) = \dim E.$$

5.1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5. Le **rang** d' une application linéaire $f : E \to F$.
Avec E de dimension finie est par définition la dimension
de l'image $f(E) = \operatorname{Im} f$.

Exemples

a°) L'application $f : E \to F$ qui, à tout vecteur $x \in E$ associe le vecteur nul 0_F de F est linéaire. On a $\operatorname{Im}\ f = \{0_F\}$ et le rang de f est nul.Le noyau $\ker f = E$.
b°) L'application f de E dans E qui, à tout vecteur $x \in E$, associe le vecteur x est linéaire. $Ker\ f = \{0_E\}$, $f(E) = E$. On l'appelle l'**identité** Id_E.
C'est un isomorphisme de E sur E,ou **automorphisme** de E.
c°) Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $a \neq 0$ un élément de $\mathbb{K}$, l'application f :$x \longmapsto ax$ est une application linéaire de E sur E et c'est un automorphisme(homothétie vectorielle).
d°) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. A tout vecteur $x \in E$, on peut faire correspondre sa composante $y \in F$ définie par :

$x = y + z,\ y \in F,\ z \in G.$

L'application $f : x \longmapsto y$ est une application linéaire de E dans F qu'on appelle **projection** sur F parallèlement à G. Le noyau de f est G et l'image $f(E)$ est F.
Si E est de dimension finie, on vérifie directemnet le théorème noyau-image sur les dimensions.

e°) Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n, avec le polynôme nul. L'application $f : P \longmapsto P + P'$, où P' est le polynôme dérivé de P, est une application linéaire de E dans E, on dit encore que c'est un $\mathbb{C}$-endomorphisme de E.
On vérifie directement que $Ker\ f = \{0\}$; il résulte alors du théorème 1 que f est un automorphisme de E donc est surjective.

f°) Une application linéaire de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans $\mathbb{K}$ s'appelle une **forme linéaire** sur E ($\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même). Soit f une forme linéaire non nulle sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On a $\text{Im}\ f \neq \{0\}$ et $\text{Im}\ f \subset \mathbb{K}$; donc l'image de f , espace de dimension 1 appelé **droite vectorielle** (à cause de sa dimension qui est **1**) et le noyau de f est de dimension $n - 1$ et on dit que c'est un **hyperplan** de E.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel.**
L'ensemble des formes linéaires de E se note E^* ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ c'est un -espace vectoriel appelé le **dual** de E.

5.1.3 Projections et symétries linéaires

Introduction

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tel que $E = F \oplus G$ alors
$\forall x \in E,\ x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ de façon unique.
La projection P_F sur F parallèlement à G est telle que
$\forall x \in E,\ P_F(x) = x_F$ et $P_F \circ P_F = P_F$(on dit que P_F est un projecteur).
Aussi $\forall x \in E,\ P_F(x) = x_F = x_F + x_G - x_G = (Id_E - P_G)(x)$
La projection P_G sur G parallèlement à F est telle que
$\forall x \in E,\ P_G(x) = x_G$ et $P_G \circ P_G = P_G$.
Aussi $\forall x \in E,\ P_G(x) = x_G = x_G + x_F - x_F = (Id_E - P_F)(x)$
La symétrie S_F par rapport à F parallèlement à G est telle que
$\forall x \in E,\ S_F(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = (2P_F - Id_E)(x)$
$\forall x \in E,\ S_F(x) = x_F - x_G = (x_F + x_G) - 2x_G = (Id_E - 2P_G)(x)$.
et $S_F \circ S_F = Id_E$(on dit que S_F est une involution).
La symétrie S_G par rapport à G parallèlement à F est telle que
$\forall x \in E,\ S_G(x) = x_G - x_F = (2P_G - Id_E)(x) = (Id_E - 2P_F)(x)$.
et $S_G \circ S_G = Id_E$.
Aussi $S_G = -S_F = 2P_G - Id_E = Id_E - 2P_F$.

Définition

Les P_F et P_G définies supra, sont appélées projections vectorielles
Aussi les S_F et S_G définies supra, sont appélées symétries vectorielles
c'est clair que projection et symétrie vectorielles sont des applications linéaires.

5.2 Opérations sur les applications linéaires

5.2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Appelons $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Somme de deux applications linéaires

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F.

On définit $f + g : E \to F$ par : $\forall x \in E,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
On vérifie que $f + g$ est bien une application linéaire de E dans F.
On l'appelle **somme** de f et g.

Produit de $\alpha \in \mathbb{K}$ **par** $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Il est définit par : $\forall x \in E,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
On vérifie que αf est bien une application linéaire de E dans F.

Proposition 3

Les deux opérations précédentes confèrent à l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ *une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$.

5.2.2 Composition des applications linéaires

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Etant donné une application linéaire $f : E \to F$ et une application linéaire $g : F \to G$, on vérifie immédiatement que $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire de E dans G. En particulier, si $E = F = G$, nous définissons une loi de composition interne dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = End_{\mathbb{K}}(E)$ avec la loi"$\circ$" des compositions des applications qu'on appelle la **multiplication.**

Proposition 4. *L'addition et la multiplication"$\circ$" définies dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ en font un anneau non commutatif.*

Remarque. Le composé de deux isomorphismes est un isomorphisme et donc, en particulier, le composé de deux automorphismes de E est un automorphisme. Si E est de dimension finie, l'ensemble des automorphismes de E constitue le groupe des unités(l'ensemble des éléments inversbles) de l'anneau $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

5.3 Matrice d'une application linéaire $f : E \to F$

Relativement à des bases données de E et de F.
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et q sur $\mathbb{K}$, $\beta = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F ; f est complètement déterminée par son action sur la base β, c'est-à-dire que f est entièrement définie par les $f(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij}t_i,\ a_{ij} \in \mathbb{K},\ \ j = 1, 2, ..., p$.Ainsi les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ constitue la matrice colonne suivante : $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$.

Proposition
Etant donné $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie, muni d'une base $\beta = (e_1, ..., e_p)$, alors $\operatorname{Im} f =< f(e_i), 1 \le i \le p >$.

Définition On appelle **matrice de l'application linéaire** $f : E \to F$, **relativement aux bases** β **et** β', avec $\beta = (e_1, ..., e_p)$ et $\beta' = (t_1, ..., t_q)$ (on sait que f est entièrement définie par les $f(e_j) \in F$, pour tout $j \in [|1, p|]$), est la matrice de type (q, p) :

$$M_{\beta'\beta}(f) = \begin{array}{cc} f(e_1)\,;f(e_2)\,;...;f(e_p) & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & ... & a_{qp} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_q \end{array} \end{array}$$

dont la $j^{ème}$ colonne $(j = 1, 2, ..., p)$ est constituée par les coordonnées $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{qj} \end{bmatrix}$ du vecteur $f(e_j)$ par rapport à la base β'. C'est pourquoi nous avons écrit $f(e_1)$ au dessus de la première colonne, ..., $f(e_p)$ au-dessus de la $p^{ième}$ colonne.
Lorsque $E = F$, l'application linéaire f est un endomorphisme de E et nous pouvons choisir $\beta = \beta'$. La matrice $M_{\beta\beta}(f)$ s'appelle la matrice de l'endomorphisme relativement à la base β de E.

Remarque
De façon symbolique, on peut écrire :
$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p)) = (t_1, ..., t_q)\, M_{\beta'\beta}(f)$
soit $f(\beta) = \beta' M_{\beta'\beta}(f)$, tout ceci est **symbolique**.

Exemple : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$(x,y,z) \longmapsto (2x-y-z; x-z; \lambda x - y - 2z)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\beta = (e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.Pour trouver la matrice de f relativement à la base β associé à l'ensemble de depart et à l'ensemble d'arrivé, il faut calculer :
$f(e_1) = (2;1;\lambda)$; $f(e_2) = (-1;0;-1)$; $f(e_3) = (-1;-1;-2)$.
Et la matrice en question est $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Proposition
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases respectives β, β',γ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,G)$
$M_{\gamma\beta}(g \circ f) = M_{\gamma\beta'}(g) \times M_{\beta'\beta}(f)$.

Proposition
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et q,
Munis respectivement des bases $\beta = (e_1,...,e_p)$ et $\beta' = (t_1,...,t_q)$
L'application de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ dans $M_{qp}(\mathbb{K})$ définie par $f \mapsto M_{\beta'\beta}(f)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F sur l'espace vectoriel des matrices de type(q,p) sur $\mathbb{K}$.

Dem :
Moyennant $\beta = (e_1,...,e_p)$ et $\beta' = (t_1,...,t_q)$ respectivement sur E *et* F *deux* $\mathbb{K}$-*espaces vectoriels de dimensions respectives* p *et* q, il y a isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^p$ et isomorphisme entre F et $\mathbb{K}^q$.

Ainsi $\forall x \in E$, $\exists! x^\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^p$ matrice colonne qui représente les coordonnées du vecteur $x \in E$ dans la base β de sorte que symboliquement : $x = \beta \times x^\beta = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$.

Il sera de même de F c'est-à-dire :
$\forall y \in F$, $\exists! y^{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^q$ matrice colonne qui représente les coordonnées du vecteur $y \in F$ dans la base β' de sorte que symboliquement : $y = \beta' \times y^{\beta'} = \sum_{i=1}^{q} y_i t_i$.

De là l'application linéaire $f : (E,\beta) \longrightarrow (F,\beta')$ peut être définie comme suit :
a) $f(x) = y$ on n'a pas utilisé les bases en présence.
b) $f(x^\beta) = y^{\beta'}$on a utilisé les bases en présence, ce qui permettra de déterminée f à la donnée de $M_{\beta'\beta}(f)$ en posant : $f(x^\beta) = M_{\beta'\beta}(f) \times x^\beta = (f(x))_{\beta'} = y^{\beta'}$.
Avec les données de f , β et β' on a naturellement $M_{\beta'\beta}(f)$.

Corollaire *L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est de dimension finie $n = pq$.*

Remarques
1°) Les espaces vectoriels $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $M_{qp}(\mathbb{K})$ sont isomorphes mais cet isomorphisme dépend des bases β et β' choisies dans E et F.
On devrait le noter : $M_{\beta'\beta} : \mathcal{L}_K(E,F) \rightarrow M_{qp}(\mathbb{K})$.
Il est déterminé par le choix de ces bases.

2°) Il résulte de la proposition 1 qu'une matrice $q \times p$ quelconque dont les coefficients appartiennent à un corps $\mathbb{K}$ peut toujours être considérée comme la matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension p sur $\mathbb{K}$ dans un espace vectoriel F de dimension q sur $\mathbb{K}$,
par exemple de $E = \mathbb{K}^p$ dans $F = \mathbb{K}^q$.

5.3.1 Changement de bases

Matrice de passage

Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E.
On voudrait avoir la matrice de : $Id_E : (E, \beta') \longrightarrow (E, \beta)$ telle que $x \longmapsto x$.
(E, β) signifie que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, est muni de la base β.
On sait que $\forall 1 \leq j \leq n$, $\exists! \, (\alpha_{1j}, \alpha_{2j,} ..., \alpha_{nj}) \in \mathbb{K}^n$; $e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$.
Ainsi d'après ce qui précède en matière de la matrice d'une application linéaire relativement à des bases sur les espaces de départ et d'arrivé, on a :

$$M_{\beta\beta'}(Id_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & ; \; e'_2 & ; \; ... \; ; & e'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

On appelle matrice de **passage** de la base β à la base β',
la matrice : $Mat_{\beta\beta'}(Id_E) = P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \, , \, j \leq n} = P_{\beta\beta'}$.
Comme l'application Id_E est bijective, alors $P = P_{\beta\beta'}$ est **inversible**.
En pratique donc,
la matrice $P = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \, , \, j \leq n} = P_{\beta\beta'}$est telle que la $j^{-ième}$ colonne est formée par les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\beta = (e_1, ..., e_n)$.
Et $P^{-1} = P_{\beta'\beta}$ est la matrice de passage de la base β' à la base β.

Formule de changement de bases

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et (E, β), (F, γ)
Soit $(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{f} (F, \gamma) \xrightarrow{Id_F} (F, \gamma')$
On a bien $f = Id_F \circ f \circ Id_E \Rightarrow$
$Mat_{\gamma'\beta'}(f) = Mat_{\gamma'\beta'}(Id_F \circ f \circ Id_E) = Mat_{\gamma'\gamma}(Id_F) \times Mat_{\gamma\beta}(f) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.
Soit maintenant $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, E) \Leftrightarrow u \in End_{\mathbb{K}}(E)$, on a
$(E, \beta') \xrightarrow{Id_E} (E, \beta) \xrightarrow{u} (E, \beta) \xrightarrow{Id_E} (E, \beta')$, et $u = Id_E \circ u \circ Id_E \Rightarrow$
$Mat_{\beta'\beta'}(u) = Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$.
Comme (Id_E) est une bijection de E dans E, alors $Mat_{\beta'\beta}(Id_E)$ est inversible et $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = \left(Mat_{\beta\beta'}(Id_E)\right)^{-1}$. De là on a la proposition suivante :
Proposition
Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E, $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,
$P = P_{\beta\beta'} = Mat_{\beta\beta'}(Id_E)$, $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$,
$A' = Mat(u, \beta') = Mat_{\beta'\beta'}(u)$
$= Mat_{\beta'\beta'}(Id_E \circ u \circ Id_E) = Mat_{\beta'\beta}(Id_E) \times Mat_{\beta\beta}(u) \times Mat_{\beta\beta'}(Id_E).$,

or $Mat_{\beta'\beta}(Id_E) = \left(Mat_{\beta\beta'}(Id_E)\right)^{-1}$, donc :
$A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}$.

Proposition

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, muni d'une base β et $A = Mat(u, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u)$.
u est un automorphisme de E ssi $\det A \neq 0$ et $A^{-1} = Mat(u^{-1}, \beta) = Mat_{\beta\beta}(u^{-1})$.

Exercice

Montrer que les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont semblables.

Proposition de solution

La solution revient à trouver quatre vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que :
$Av_1 = 0$, $Av_2 = 0$, $Av_3 = v_2$, $Av_4 = v_2 + v_3$ *et* $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) \neq 0$.
Dès lors ;
$Av_1 = 0$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_1 = (0, 0, 0, 1)$
$Av_2 = 0$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_2 = (1, 0, 0, 0)$
$Av_3 = v_2$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_3 = (0, 1, 0, 0)$
$Av_4 = v_2 + v_3$, *je propose dans β la base canonique de $\mathbb{R}^4$,* $v_4 = (0, 0, 1, 0)$.

Soit $\gamma = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, *on a* $\det \gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

De là soit $P = P_{pass(\beta \text{ à } \gamma)} = P_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *alors on a :*

$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A$ *et* B *sont semblables.*

Remarque :

Soit $x \in E$, soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E, symboliquement on notera :
$x = \beta \times x^\beta$ et $\beta' = \beta P_{\beta\beta'}$ ici β est considérée comme une matrice uniligne : $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ et β' est considérée comme une matrice uniligne : $\begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix}$.
Aussi on a : $(e'_i)_\beta = P_{\beta\beta'}(e_i)_\beta$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $(e'_i)_\beta$et $(e_i)_\beta$ sont les coordonnées de e'_i et e_i dans la base $\beta = (e_1, ..., e_n)$.

Proposition

Soient $\beta = (e_1, ..., e_n)$, $\beta' = \left(e'_1, ..., e'_n\right)$ deux bases de E.

Soit $x \in E$, et $x^\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β.

et $x^{\beta'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ = les coordonnées de x dans la base β'

alors $x^{\beta} = (P_{\beta\beta'} = P) \times x^{\beta'} \Leftrightarrow x^{\beta'} = \left(P_{\beta'\beta} = P^{-1}\right) \times x^{\beta}$.

5.3.2 Déterminant d'une suite de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie(Rappel,suite et fin)

Définition

Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ une suite de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit une base β, de E, le déterminant de la suite S dans la base β, est noté

$\det_\beta(S) = \begin{vmatrix} V_1^\beta & V_2^\beta & \cdots & V_n^\beta \end{vmatrix}$, où V_j^β constituent la $j^{ième}$ colonne avec les coordonnées de V_j dans la base β. $\forall 1 \leq j \leq n$.

Exemple

Soient $V_1 = (1, -6, 8)$, $V_2 = (0, -3, 11)$, $V_3 = (0, 0, -5)$ trois vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et $S = (V_1, V_2, V_3)$.

Comme cardinal de (S) noté $Card\,(S) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ alors on peut évaluer le déterminant de S :

$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{vmatrix} = 15$. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 11 & -5 \end{bmatrix}$,

on a $\det(S) = \det A = \det({}^tA)$.

On peut donc saisir les coordonnées des V_j en **colonne** ou en **ligne**.

Proposition

Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ une suite de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit une base β, de E,

a) Si $\det_\beta(S) \neq 0$, alors la suite S est libre ou linéairement indépendante et comme $Card\,(S) = \dim E$, donc S est **une base** de E.

b) Si $\det_\beta(S) = 0$, alors la suite S est liée ou linéairement dépendante.

Remarque

Soient deux bases $\beta = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\beta' = (t_1, t_2, ..., t_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

$P_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \cdots & t_n^\beta \end{pmatrix}$ où t_j^β constituent la $j^{ième}$ colonne avec les coordonnées de t_j dans la base β. $\forall 1 \leq j \leq n$,

et $\det\left(P_{\beta\beta'}\right) = \det_\beta(\beta') = \begin{vmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \cdots & t_n^\beta \end{vmatrix}$. Je rappelle que $P_{\beta\beta'}$ est la matrice de passage de la base β à la base β'.

Proposition

Soit $S = (V_1, V_2, ..., V_n)$ une suite de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit deux base β, β' de E, alors :

$$\begin{aligned}\det_\beta(S) &= \begin{vmatrix} V_1^\beta & V_2^\beta & \cdots & V_n^\beta \end{vmatrix} = \det_\beta(\beta') \times \det_{\beta'}(S) \\ &= \begin{vmatrix} t_1^\beta & t_2^\beta & \cdots & t_n^\beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} V_1^{\beta'} & V_2^{\beta'} & \cdots & V_n^{\beta'} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$\det_\beta(S) = \det\left(P_{\beta\beta'}\right) \times \det_{\beta'}(S)$.

5.3.3 Déterminant et trace d'un endomorphisme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Proposition
Soit un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie,
Moyennant une base β sur E qui existe en pareille situation, on peut définir :
$\det(f) = \det(M_{\beta\beta}(f)) = \det\left(M_{\beta'\beta'}(f)\right)$ et
$Trace(f) = Trace(M_{\beta\beta}(f)) = Trace\left(M_{\beta'\beta'}(f)\right)$.
Pour Toute autre base β' de E.
Dem :
On sait que $M_{\beta'\beta'}(f) = P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}$ et que :

$$\begin{aligned}\det\left(M_{\beta'\beta'}(f)\right) &= \det\left(P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}\right)\\ &= \det\left(P_{\beta\beta'}^{-1}\right) \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det\left(P_{\beta\beta'}\right)\\ &= \left(\det\left(P_{\beta\beta'}\right)\right)^{-1} \times \det(M_{\beta\beta}(f)) \times \det\left(P_{\beta\beta'}\right)\end{aligned}$$

$= \left(\det\left(P_{\beta\beta'}\right)\right)^{-1} \times \det\left(P_{\beta\beta'}\right) \times \det(M_{\beta\beta}(f))$(car $\mathbb{K}$ est un corps commutatif)
$= \det(M_{\beta\beta}(f))$.

$$\begin{aligned}\text{Aussi } Trace\left(M_{\beta'\beta'}(f)\right) &= Trace\left(P_{\beta\beta'}^{-1} \times M_{\beta\beta}(f) \times P_{\beta\beta'}\right)\\ &= Trace\left(P_{\beta\beta'}^{-1} \times P_{\beta\beta'} \times M_{\beta\beta}(f)\right) = Trace(M_{\beta\beta}(f)).\end{aligned}$$

Exercice
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\beta_0 = (e_1, e_2, e_3)$

$$\text{définie par : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Soit $X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur x_1 dans la base β_0.

1. Calculer $f(x_1)$ dans la base β_0.
2. Soient $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.
   a) Montrer que $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la matrice de passage P de la base β_0 à la base β.
   c) Déterminer la matrice de passage P' de la base β à la base β_0.
   d) Donner les coordonnées X_β du vecteur x_1 dans la base β de deux façons.
   e) Déterminer la matrice D de f dans la base β de deux façons.
   f) Calculer $f(x_1)$ dans la base β, de deux façons.
   g) Donner l'expressi on de A à partir de celle de D ci-dessus.
      Donner A^2, A^3, A^4 en fonction de P, D et P^{-1}.
      Déterminer explicitement A^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Proposé de solution

1. $(f(x_1))_{\beta_0} = Mat(f, \beta_0, \beta_0) X_{\beta_0} = A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2.
a) Avec $\beta = (u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^3$ et $Card(\beta) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$,

on va calculer $\det(\beta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donc β est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) La matrice de passage P de la base β_0 à la base β est :
$P = P_{\beta_0\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
c) La matrice de passage P' de la base β à la base β_0 est :
$P' = P_{\beta\beta_0} = \left(P_{\beta_0\beta}\right)^{-1} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$
d) On a $X_\beta = P_{\beta\beta_0} \times X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ d'une façon
l'autre façon serait par exemple de noter que
$X_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3$
$X_{\beta_0} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et en résolvant le système on trouve bien $a = 1$, $b = -6$, $c = 7$.
e) On a : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d'une façon
l'autre façon est de calculer et résoudre successivement :
$(S_1) \Leftrightarrow (f(u_1))_{\beta_0} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$
$(S_2) \Leftrightarrow (f(u_2))_{\beta_0} = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$
$(S_3) \Leftrightarrow (f(u_3))_{\beta_0} = a''u_1 + b''u_2 + c''u_3 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$
je rappelle que les (S_i) pour $i = 1, 2, 3$, sont des systèmes à résoudre.
Et alors $D = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$
f) $(f(x_1))_\beta = Mat(f, \beta, \beta) X_\beta = DX_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 14 \end{bmatrix}.$
Pour la deuxième façon, on rappelle qu'à la question 1. on a calculer $f(x_1)$ dans la base β_0, de là on fait la mise en équation suivante :
$(f(x_1))_{\beta_0} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
en résolvant le système ci-dessus, on trouve bien $a = 0$, $b = -6$, $c = 14$.
g) On a $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow \begin{cases} A^2 = PD^2P^{-1} \\ A^3 = PD^3P^{-1} \\ A^4 = PD^4P^{-1} \\ A^n = PD^nP^{-1},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}.$

Il faut savoir que
$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$

Ainsi : $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3 & 2^{n+1} & 3 - 2^{n+2} \\ 2^n - 2 & 2^n & 2 - 2^{n+1} \end{pmatrix}.$

TRAVAUX DIRIGÉS

Calcul matriciel

Exercice 1
On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculer, parmi les produits matriciels suivants, ceux qui ont un sens :

$$AB,\ BA,\ A^2,\ AC,\ CA,\ C^2,\ BC,\ \ CB,\ B^2.$$

Exercice 2
On considère la matrice
$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
1. Calculer $(A+I_3)^3$ où I_3 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3\ (\mathbb{R})$.
2. En déduire :
   a) L'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}$.
   b) Que A est inversible. Donner son inverse.
   c) Une extension de A^n où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3
Les matrices : $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$
et $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 4
Montrer que la matrice
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$
est un diviseur de zèro sur $\mathcal{M}_3\ (\mathbb{R})$ cela signifie :

trouver une matrice B non nulle telle que $AB=0$.

Exercice 5

I) Les nombres $204,\ 527$ et 255 étant divisibles par 17,
démontrer que le déterminant suivant l'est aussi sans calculer $\triangle$.

$$\triangle=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

.

II) Calculer les déterminants suivants :

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 6

I) Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{lcl} 2x-y-z & = & 4 \\ 3x+4y-2z & = & 11 \\ 3x-2y+4z & = & 11 \end{array} \right. , \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{lcl} 3x+y+z & = & 1 \\ x-y+2z & = & 2 \\ x+3y-3z & = & -3 \end{array} \right. ,$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-3z & = & 1 \\ 2x+y-2z & = & 1 \\ x+y+z & = & 3 \\ x+2y-3z & = & 1 \end{array} \right. .$$

II) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x+(m-1)\,y-3mz & = & 2 \\ x-2\,(m-1)\,y+mz & = & 1 \\ x+(m-1)\,y-2mz & = & 2m \end{array} \right. .$$

Exercice 9

Déterminer $\lambda \in \dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ de façon que le système homogène :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\overline{3}-\lambda\right) x + \overline{4}y + \overline{3}z & = \overline{0} \\ \overline{3}x + \left(\overline{3}-\lambda\right) y & = \overline{0} \\ \overline{3}x \ + \ \overline{3}y \ - \ \lambda z & = \overline{0} \end{array} \right.$$

admette des solutions non nulles, et résoudre.

Exercice 10

Discuter et résoudre le système sur $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} ax+by+cz & = 1 \\ cx+ay+bz & = 1 \\ bx+cy+az & = 1 \end{array} \right. ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 11

Discuter et résoudre le système sur $\mathbb{C}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x+\alpha y+\alpha^2 z & = 0 \\ \overline{\alpha}x+\ y+\alpha z & = 0 \\ \overline{\alpha^2}x+\alpha y+\ z & = 0 \end{array} \right. \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Compléments A

Exercice 1

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et déterminer une base de E.

Exercice 2

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Soient $\overrightarrow{u} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\overrightarrow{v} = -2e_1 + e_2 - e_3$, $\overrightarrow{w}_m = me_2 - e_3; m \in \mathbb{R}$

1) Pour quelles valeurs de m, $S_m = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}_m\}$ est-il une base de $\mathbb{R}^3$?

En déduire que S_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de passsage de la base β à la base S_1.
3) Déterminer la matrice de passage de la base S_1 à la base β.
4) Soit $\overrightarrow{H} = (-5; 1; 2)$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{H}$ dans la base S_1?
5) On considère l'application linéaire
$f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x; y; z) \mapsto (x + 2y + z; -2x + y - z; my - z)$.
a) Quelle est la matrice de f_m dans la base β?
b) Dans quels cas f_m est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
En déduire que f_0 et f_1 sont des automorphismes de $\mathbb{R}^3$.
c) Trouver $(x; y; z)$ tel que $f_1(x; y; z) = (0; 1; 7)$ et calculer $(\ f_1)^{-1}(2; 5; 0)$.

Exercice 3

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -i & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -5 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

1°) Calculer si possible les matrices suivantes : $E = AB$ et $E' = BA$
que peut-on conclure ?
2°) Calculer si possible les matrices : $F = AD$ et $F\prime = DA$.
3°) Calculer C^3. En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 4

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que A et B Sont inversible et déterminer leur inverse.
Mêmes questions pour C=AB.

2°) Résoudre dans IR^3l'équation matricielle $CT = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$.

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $A^2 = A - I_2$.
b) Calculer A^3
c) Montrer que, si p est un entier positif, on a :
$A^{3p} = (-1)^p I_2$, $A^{3p+1} = (-1)^p A$, $A^{3p+2} = (-1)^p (A - I_2)$.
d) Les suites réelles (u_n) et (v_n) sont définies par les relations de récurrence :
$u_{n+1} = u_n + v_n$, $v_{n+1} = -u_n$ et par la donnée de u_1 et v_1.
Calculer u_n et v_n en fonction de u_1, v_1 et n, en particulier
pour $n = 3p$; $n = 3p + 1$; $n = 3p + 2, p \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3 et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère l'application $\mathbb{R}$ - linéaire $u : E \to E$ définie par :

$u(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3, \qquad u(e_2) = -u(e_1), \qquad u(e_3) = e_1 - e_2.$
Soit M la matrice de u dans la base β. On pose :
$f_1 = e_2 + e_3, \qquad f_2 = e_1 + e_3, \qquad f_3 = e_1 + e_2$ et $\varsigma = (f_1, f_2, f_3)$.
1) Écrire la matrice M.
2) Calculer la dimension de $Ker(u)$, le rang de u et le rang de M.
3) Montrer que ς est une base de E.
4) Soit P la matrice de passage de la base β à la base ς et
N la matrice de u dans la base ς.
4-a) Déterminer les matrices P, P^{-1} et N.
4-b) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer N^k et en déduire M^k.

Exercice 7

1°) Inverser si possible la matrice : $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -m \\ m-4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2°) Résoudre dans IR^3 en discutant éventuellement suivant les valeurs de m le système :

$$(\textstyle\sum_1) \begin{cases} 3x + y - z = -m \\ 3x + y - mz = -3 \\ (m-4)\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$(\textstyle\sum_2) \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 3x + y + z = -3 \\ -5\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \text{avec les formules de Cramer}$$

Compléments B

Exercice 1
Vous répondrez par Vrai ou faux avec justification

a) A un homomorphisme donné f correspond une infinité de matrices qui lui sont associées.

b) L'application identique d'un espace vectoriel E de dimension finie se traduit par la même matrice dans toutes les bases de E.

c) Si le produit matriciel $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

d) Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre inversibles, alors leur somme est inversible, avec

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

e) Si A est une matrice inversible, sa transposée admet comme inverse la transposée de A^{-1}.

f) Si $AB = I$, alors A et B sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

g) Deux matrices distinctes ont deux déterminants distincts.

h) Pour tout entier n et toute matrice carrée A : $det A^n = (\det A)^n$.

Exercice 2
On considère les matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et comparer avec $(A + B)^2$. Commenter.

Exercice 3
Si M et N sont deux matrices de types respectifs (m, n) et (n, m) telles que $MN = I$, montrer que la matrice $P = NM$ est idempotente, c'est-à-dire que $P^2 = P$.

En déduire que P est diviseur à droite et à gauche de zéro.

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier, Algèbre MPSI, Cours et 700 Exercices Corrigés, 3ème édition, DUNOD

[2] J.-P.Lecoutre, P. Pilibossian, Travaux Dirigés, Algèbre, 2ème édition, DUNOD

[3] J.Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, Cours de Mathématiques, Tome 1, Algèbre, 3ème édition, DUNOD.

[4] Claude Boy, Alain Nizard, Prépas TD Algèbre, Exercices et corrigés, Armand Colin.

[5] Algèbre linéaire de Prof. Eva Bayer Fluckiger ; Dr. Philippe Chabloz